11 НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

УДК 531.44; 534.014; 53.072; 001.891.57; 372.853

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

Предложена модель лабораторного исследования затухающих колебаний пружинного маятника на наклонной плоскости при наличии в системе трения скольжения. Данная модель является примером неэкспоненциального характера затухания гармонических колебаний, объяснение которого возможно в рамках курса общей физики. Показано, что колебания такого маятника происходят с постоянной частотой, равной частоте собственных колебаний пружинного маятника, при этом амплитуда колебаний каждые полпериода уменьшается на одинаковую величину. На основе предложенной методики исследования можно определить работу силы трения скольжения. Предложенная дидактическая модель реализована в виде двух лабораторных работ – компьютерной и натурной. Работы способствуют расширению представлений студентов о методах исследования затухающих колебаний в системах с различной природой сопротивления среды.

Ключевые слова: физическая модель, пружинный маятник, наклонная плоскость, затухающие колебания, компьютерная лабораторная работа, натурная лабораторная работа.

Введение

Затухающие колебания являются одной из фундаментальных тем курса общей физики. Традиционно при ее изучении рассматривают влияние на гармонические колебания маятника только силы вязкого трения, пропорциональной модулю скорости движения маятника [1, 2]. При этом амплитуда колебаний со временем уменьшается по экспоненциальному закону. Другие виды трения (сопротивления среды) описываются другими зависимостями силы сопротивления от скорости и приводят к иному характеру изменения амплитуды затухающих колебаний от времени. Однако анализ этого вопроса отсутствует как в современных учебниках по общей физике, так и в лабораторных практикумах, тогда как, например, природа влияния силы трения скольжения на движение механической колебательной системы полностью соответствует содержанию курса общей физики и описывается доступным студентам младших курсов математическим аппаратом.

С методической точки зрения в курсе общей физики важно показать, что затухание колебаний может происходить не только по экспоненциальному закону и что характер уменьшения амплитуды колебаний зависит от природы сил сопротивления (трения), действующих в изучаемой системе. В то же время экспериментальное изучение в рамках лабораторного практикума различных видов затухания позволит добиться методической цельности рассмотрения данного вопроса в курсе общей физики.

Физическая модель

Рассмотрим пружинный маятник, который может двигаться с трением вдоль наклонной плоскости: тело (материальная точка) массой m, соединенное с невесомой пружиной жесткостью k, скользит по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту; второй конец пружины закреплен в верхней точке наклонной плоскости (рис. 1). Согласно второму закону Ньютона, ускорение $\mathbf{a}$ тела (материальной точки) массой m зависит от векторной суммы сил, действующих на тело (силы тяжести $m\mathbf{g}$, силы реакции опоры $\mathbf{R}$, силы упругости со стороны пружины $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ и силы трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$): $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{упр}} + m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_{\text{тр}}$. Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения (скорости $\mathbf{v}$) маятника.

Начало отсчета декартовой системы координат XOY (рис. 1) удобно совместить с точкой, в которой соединенная с телом пружина не деформирована. Тогда x-координата тела будет задавать не только его положение на наклонной плоскости, но и величину деформации связанной с телом пружины. Направим ось OX так, чтобы положительной координате тела соответствовало растяжение, а отрицательной – сжатие пружины.

Хорошо известно, что модуль силы трения при движении тела по наклонной плоскости равен $|F_{\text{тр}}| = \mu|R| = \mu mg \cdot \cos\alpha$ (где μ – коэффициент трения). Проекция силы трения на ось OX поочередно меняет знак с плюса (движение вверх) на минус (движение вниз) и обратно. С учетом этого движение тела по наклонной плоскости будет описываться поочередно двумя уравнениями: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg\cdot\sin\alpha + |F_{\text{тр}}|$ (при движении вверх) и $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg\cdot\sin\alpha - |F_{\text{тр}}|$ (при движении вниз).

Для решения дифференциальных уравнений удобно ввести константы, имеющие смысл положений равновесия маятников: $X_{0+} = \frac{1}{k}(mg\sin\alpha + |\mathrm{F}_{\text{тр}}|)$ (при движении вверх) и $X_{0-} = \frac{1}{k}(mg\sin\alpha - |F_{\text{тр}}|)$ (при движении вниз). Тогда дифференциальные уравнения примут вид уравнений гармонических колебаний относительно соответствующих положений равновесия $X_{0\pm}$ с постоянной частотой $\omega = \sqrt{k/m}$ ($X_{0\pm} = X_{0+}$ при движении вверх, $X_{0\pm} = X_{0-}$ при движении вниз по наклонной плоскости)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x - X_{0\pm}\right).$$

Решения этих дифференциальных уравнений с учетом начальных условий ($v(0) = v_0 = 0$, $x(0) = A_0 > 0$, движение начинается вверх без начальной скорости) можно записать в виде

$$x = X_{0\pm} + A\cos\omega t.$$

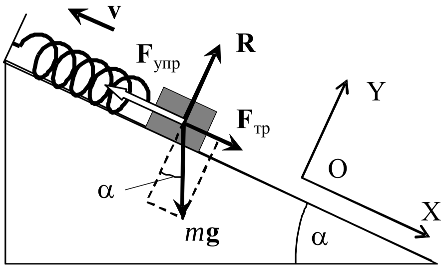

Рис. 1. Силы, действующие на пружинный маятник при движении вверх по наклонной плоскости

Тело меняет направление движения каждые полпериода. По этой причине уравнения $x = X_{0+} + A\cos\omega t$ и $x = X_{0-} + A\cos\omega t$, описывающие зависимость координаты тела от времени, тоже чередуются. Следовательно, положения равновесия маятника X_{0+}, X_{0-} чередуются каждые полпериода синхронно с изменением направления силы трения. Другими словами, каждые полпериода происходит скачкообразное смещение положения равновесия маятника на одну и ту же величину ΔX_0 (то в одну, то в другую сторону):

$$\Delta X_0 = \left|X_{0+} - X_{0-}\right| = \frac{1}{k}(mg\sin\alpha + |F_{\text{тр}}|) - \frac{1}{k}(mg\,\mathrm{si}\,\alpha - |F_{\text{тр}}|),\ \Delta X_0 = 2\frac{|F_{\text{тр}}|}{k}.$$

Таким образом, зависимость положения равновесия от времени носит разрывный кусочно-линейный характер (рис. 2). Такое поведение положения равновесия маятника со временем вызвано наличием постоянной по модулю, но периодически изменяющей направление силы трения скольжения в системе.

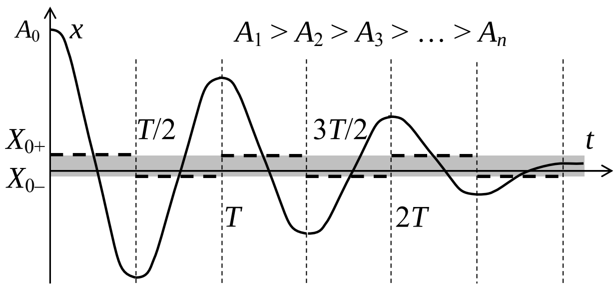

Рис. 2. Зависимость координаты пружинного маятника на наклонной плоскости от времени

Если бы при таком (разрывном кусочно-линейном) поведении положения равновесия колебания пружинного маятника совершались с постоянной амплитудой A, то зависимость $x(t)$ представляла бы собой разрывную кусочно-гладкую функцию. Однако это не так – маятник движется так, что координата тела меняется непрерывно (рис. 2). Чтобы при кусочно-линейном характере изменения положения равновесия $X_{0\pm}$ получить непрерывный характер зависимости $x(t)$, необходимо, чтобы амплитуда колебаний A также являлась кусочно-непрерывной функцией (рис. 3), изменяясь каждые полпериода: $A(t) = A_n$ для $(n-1)T/2 \le t \le nT/2$ ($n = 1, 2\ldots$ – номер полупериода). Тогда зависимость координаты тела от времени следует записать в виде

$$x(t) = X_{0\pm} + A_n\cos\omega t \text{ для } (n-1)T/2 \le t \le nT/2\ (n = 1, 2\ldots \text{ – номер полупериода}).$$

Чтобы зависимость $x(t)$ была гладкой и непрерывной, необходимо, чтобы ее соседние куски на границе имели одинаковые значения функции и производной. Границами отдельных кусков этой функции являются экстремумы (точки остановки, в которых скорость обращается в ноль, а тело меняет направление движения). Так как частота колебаний постоянна, функция имеет экстремумы через каждые полпериода. В связи с этим достаточно, чтобы в конце предыдущего и в начале последующего полупериода функция $x(t)$ имела бы одинаковые значения. Из этого условия легко получить взаимосвязь между значениями амплитуды A_n и A_{n-1}, соответствующими соседним полупериодам:

$$A_n = A_{n-1} - \Delta A \text{, где } \Delta A = X_{0+} - X_{0-} = 2\frac{|F_{\text{тр}}|}{k},\ A_1 = A_0 - X_{0+}.$$

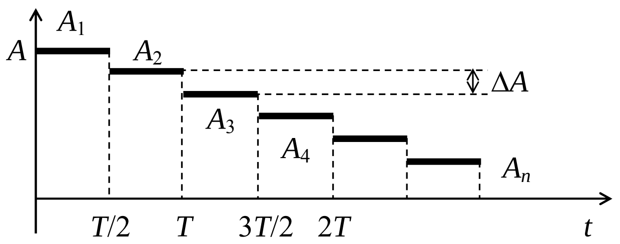

Рис. 3. Зависимость амплитуды пружинного маятника на наклонной плоскости от времени

Анализ рассмотренной модели показывает, что амплитуда затухающих колебаний пружинного маятника на наклонной плоскости уменьшается каждые полпериода не экспоненциально, а дискретно, на постоянную величину ΔA. От величины изменения амплитуды за полупериод ΔA зависит, как быстро затухают колебания.

С увеличением модуля силы трения в колебательной системе изменение амплитуды $\Delta A = 2|F_{\text{тр}}|/k$ за полупериод увеличивается, следовательно, тело совершит меньше колебаний до остановки. Заставить маятник совершать большее количество колебаний можно, либо увеличив жесткость пружины, либо уменьшив силу трения. Модуль силы трения $|F_{\text{тр}}| = \mu mg \cdot \cos\alpha$ зависит от массы тела m, коэффициента трения μ и угла наклона α плоскости по отношению к горизонту. По этой причине увеличение угла наклона плоскости α равносильно уменьшению трения в системе.

Дальнейший анализ модели позволяет определить условия начала и окончания движения пружинного маятника на наклонной плоскости.

Методика экспериментального изучения характеристик затухающих колебаний

Таким образом, центральной задачей методики экспериментального изучения колебаний пружинного маятника на наклонной плоскости следует считать определение и анализ их основных характеристик – частоты колебаний, закона изменения амплитуды и закона изменения положения равновесия маятника со временем. Так как колебания происходят с постоянной частотой в эксперименте для определения частоты ω колебаний маятника необходимо измерить период T колебаний (время одного полного колебания), однозначно связанный с циклической частотой: $\omega = 2\pi/T$.

Для получения зависимости положения равновесия и амплитуды от времени необходимо измерить по две координаты тела, относящиеся к одному и тому же полупериоду движения, в пределах которого координата тела выражается одним и тем же уравнением $x(t) = X_{0\pm} + A_n \cos\omega t$, через соответствующую амплитуду A_n и положение равновесия $X_{0\pm}$ (один кусок кусочно-непрерывной функции). Чтобы упростить вычисления, можно измерить координаты точек, соответствующие началу и концу выбранного полупериода. В эти моменты времени тело останавливается и меняет направление движения, т.е. график зависимости координаты тела от времени $x(t)$ в этих точках будет иметь экстремумы, а косинус будет равен +1 или –1. В связи с этим точки, соответствующие экстремумам зависимости $x(t)$, являются наиболее удобными для измерений.

Если измерения относятся к нечетному полупериоду ($n = 2k + 1$ – движение вверх; $X_{0\pm} = X_{0+}$), то началу полупериода ($t = (n-1)T/2 = kT$) будет соответствовать максимум координаты: $x(t) = x_{\max} = X_{0+} + A_n \cos(2k\pi) = X_{0+} + A_n$. Концу полупериода ($t = nT/2 = (2k+1)T/2$) будет соответствовать минимум координаты: $x(t) = x_{\min} = X_{0+} + A_n \cos((2k+1)\pi) = X_{0+} - A_n$.

Совместное решение полученных уравнений позволяет выразить A_n и X_{0+} через координаты $x_{\max}$ и $x_{\min}$ соседних экстремумов. Легко показать, что соотношение между амплитудой, положением равновесия и координатами соседних экстремумов записывается одинаково как для нечетного, так и для четного полупериода и имеет вид

$$A_n = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min}),\ X_{0\pm} = \frac{1}{2}(x_{\max} + x_{\min}).$$

Эти соотношения позволяют планировать экспериментальные измерения и их анализ в лабораторном практикуме курса общей физики.

Компьютерная модель экспериментальной установки и результаты исследования

На основании изложенной физической модели и методики изучения характеристик затухающих колебаний авторами разработана компьютерная лабораторная работа «Пружинный маятник на наклонной плоскости» (рис. 4).

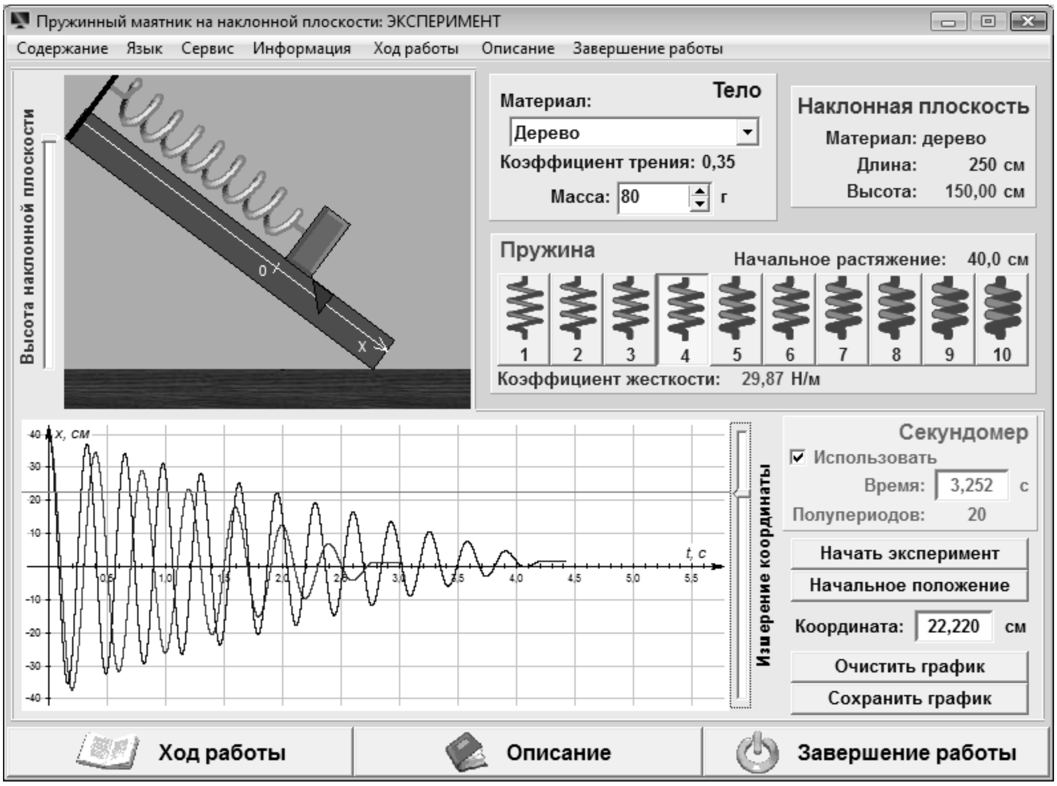

Рис. 4. Компьютерная лабораторная работа «Пружинный маятник на наклонной плоскости»

В работе с помощью средств компьютерной графики моделируется движение пружинного маятника на деревянной наклонной плоскости длиной 250 см. Трение в системе представлено только силой трения скольжения тела о наклонную плоскость. Остальные виды трения отсутствуют. Высоту наклонной плоскости можно изменять от 0 до 150 см. Для определения периода колебаний студентам рекомендуется измерить время целого количества полупериодов с помощью встроенного секундомера. Для получения зависимости от времени амплитуды и положений равновесия маятника необходимо измерить координаты тела в точках поворота (максимумах и минимумах зависимости координаты тела от времени, которая строится синхронно с выполнением эксперимента).

Компьютерная лабораторная работа «Пружинный маятник на наклонной плоскости» позволяет выполнять исследования для маятников, состоящих из невесомой пружины с известной жесткостью и тела, которое может быть выполнено из материалов, характеризующихся различным коэффициентом трения о деревянную поверхность, например, из цинка, латуни, стали, чугуна и т.д. На рис. 5 приведены полученные при выполнении данной работы зависимости от времени амплитуды колебаний (рис. 5, а) и положений равновесия (рис. 5, б) для маятников с деревянными телами различной массы, двигавшихся по наклонной плоскости высотой 150 см. Предложенная авторами лабораторная работа позволяет выполнить аналогичные исследования и на горизонтальной плоскости. Кроме того, получаемый в работе набор экспериментальных данных позволяет рассчитать работу силы трения скольжения двумя способами:

1. из определения работы;
2. из теоремы об изменении и сохранении механической энергии системы.

В первом случае необходимо знать модуль силы трения и путь, пройденный телом по наклонной плоскости. Тело движется последовательно от одной точки поворота до другой, координаты которых измеряются в работе, поэтому путь, пройденный телом, легко вычислить. Модуль силы трения легко определить из изменения амплитуды колебаний маятника за полупериод.

Как в начале, так и в конце эксперимента тело покоится, поэтому работу силы трения из теоремы об изменении и сохранении полной механической энергии можно рассчитать как разность потенциальных энергий в начальном и конечном положении тела на плоскости. Потенциальная энергия тела складывается из потенциальной энергии тела, поднятого над землей, и потенциальной энергии сжатой пружины, соединенной с телом. В выбранной системе координата тела также описывает и величину деформации пружины, поэтому для расчета работы силы трения достаточно измерить только начальную и конечную координату тела на плоскости. Сопоставление результатов расчетов, полученных двумя разными способами, позволяет проконтролировать корректность определения модуля силы трения из характеристик затухающих колебаний маятника. Этот же метод может быть использован и при выполнении аналогичных натурных экспериментов.

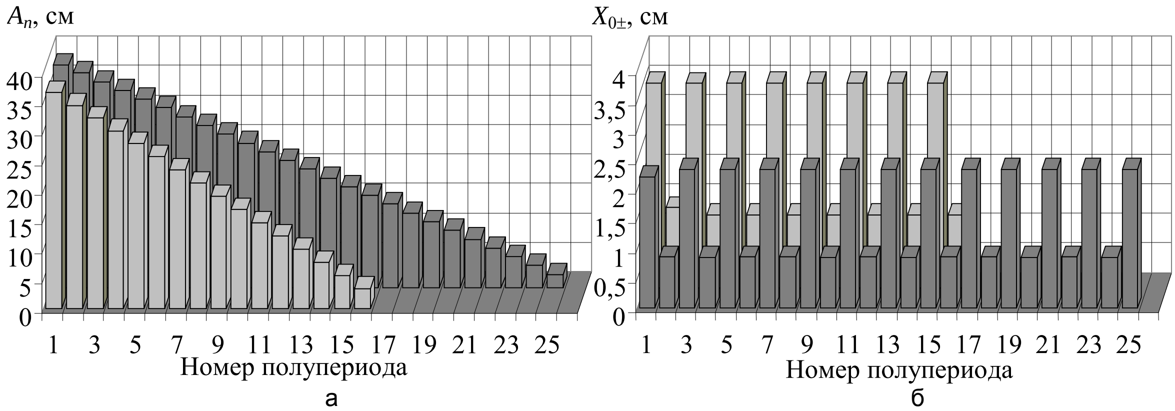

Рис. 5. Результаты, полученные при выполнении компьютерной лабораторной работы «Пружинный маятник на наклонной плоскости»: изменение со временем амплитуды колебаний (а), изменение положения равновесия маятника (б) (для тела массой: – 80 г, – 120 г)

Прежде чем приступить к измерениям, студентам рекомендуется подобрать для выполнения работы пружину, позволяющую маятнику совершать достаточно большое количество колебаний, как для тел малой массы, так и для тел большой массы. Очевидно, для тел, сделанных из различных материалов, необходимо выбирать пружины с различной жесткостью. Такой подход позволяет, с одной стороны, подчеркнуть общность физической модели, а с другой – обосновать уникальность конкретных условий эксперимента для тел, выполненных из различных материалов. Выполнение этого этапа работы подчеркивает также важность соблюдения оптимальных условий, которые реализуются в натурном эксперименте.

Компьютерная работа «Пружинный маятник на наклонной плоскости» входит в комплекс оригинальных лабораторных работ по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере [3–5], который разрабатывается на кафедре теоретической и экспериментальной физики Национального исследовательского Томского политехнического университета (Россия) с 2002 г. В настоящее время комплекс включает 27 лабораторных работ.

Заключение

На кафедре прикладной физики и нанофизики Севастопольского национального университета ядерной энергии и промышленности (Украина) под руководством профессора А.Г. Риппа ведется работа над созданием натурной лабораторной работы «Маятник Окса», в которой студенты изучают затухающие колебания пружинного маятника на горизонтальной плоскости. В рамках этой работы при фиксированных, оптимальных условиях эксперимента исследования начинаются с определения характера зависимостей частоты и амплитуды колебаний от времени. На основе выполненных измерений студенты должны показать, что колебания действительно происходят с постоянной частотой, а амплитуда каждые полпериода уменьшается на одинаковую величину. Работа выполняется для тел различной массы, изготовленных из одного и того же материала.

Сотрудничество Томского и Севастопольского университетов в разработке и комплексном использовании описанных выше компьютерной и натурной лабораторных работ наглядно демонстрирует роль теоретических моделей в объяснении и предсказании результатов натурных экспериментов. При таком подходе студент сначала при выполнении компьютерной работы получает возможность детально изучить субъективно новую для него модель, обосновать оптимальные условия эксперимента, убедиться, что частота колебаний маятника не зависит от угла наклона плоскости. Приступая после этого к выполнению натурной лабораторной работы, студент подготовлен к пониманию ее физической сути, способен оценить, какие условия могут повлиять на точность получаемых им результатов. Это дает основания для обсуждения вопроса о степени применимости изученной студентом модели к проведенному им же эксперименту.

Литература

1. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 309 с.
2. Китель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. – М.: Наука, 1971. – 480 с.

3. Revinskaya Olga G., Kravchenko Nadegda S. Studying of theoretical models of the physical phenomena and processes on the computer in a laboratory practical work // Journal of International Scientific Publication: Educational Alternatives. – 2010. – V. 8. – № 2. – P. 51–59.
4. Ревинская О.Г., Кравченко Н.С. Методика экспериментального изучения работы диссипативных сил на примере работы силы трения и ее реализация на компьютере // Фундаментальные исследования. – – 2011. – № 12. – Ч. 1. – С. 52–57.
5. Кравченко Н.С., Ревинская О.Г. Изучение динамики реактивного движения с помощью компьютерной лабораторной работы // Физическое образование в вузах. – 2012. – Т. 18. – № 2. – С. 83–92.

Ревинская Ольга Геннадьевна – Национальный исследовательский Томский политехнический университет, зав. лабораторией, кандидат педагогических наук, доцент, ogr@tpu.ru

Кравченко Надежда Степановна – Национальный исследовательский Томский политехнический университет, кандидат физ.-мат. наук, доцент, KravchenkoNS@tpu.ru