

где \vec{S} – внутренний момент (спин) системы:

$$\vec{S} = \vec{L}_{\text{оми}} + \sum \vec{s}_a.$$

Из последнего равенства следует, что *спин системы складывается из орбитального момента, обусловленного относительным движением составляющих систему частиц, и суммы спинов этих частиц. Такова же структура спина любой частицы.*

5. *Релятивистское рассмотрение.* Если не ограничиваться скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, то для пересчета координат и времени наступления событий от одной инерциальной системы отсчета к другой нужно использовать преобразования Лоренца. Важно подчеркнуть, что вывод этих преобразований опирается только на требования об однородности пространства и времени, об изотропии пространства и об эквивалентности всех инерциальных систем отсчета. При этом не нужны никакие априорные предположения о существовании инвариантной скорости: она появляется в теории сама собой. Преобразования Галилея – частный случай преобразований Лоренца. Они получаются, если к перечисленным выше требованиям добавить предположение о справедливости постулата об абсолютности времени, что равносильно предположению об обращении инвариантной скорости в бесконечность. Преобразования Лоренца выглядят гораздо сложнее преобразований Галилея, но зато их структура такова, что позволяет развить математический язык, который автоматически учитывает не только изотропию пространства (как это делает уже язык обычных скаляров, векторов и т.д.), но также автоматически учитывает и принцип относительности. В результате однозначно фиксируются, например, релятивистские выражения для импульса и энергии частицы:

$$\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a \gamma(v_a), \quad E_a = m_a c^2 \gamma(v_a),$$

где c – инвариантная скорость, m_a – та же, что и выше, инвариантная масса частицы, а

$$\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

При $v_a \ll c$ получаются приближенные выражения:

$$\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a, \quad E_a = m_a c^2 + m_a v_a^2/2.$$

Отсюда сразу следует, что *внутренняя энергия частицы выражается через её массу (знаменитая формула Эйнштейна):*

$$E_a^{(0)} = m_a c^2.$$

Из релятивистских выражений для импульса и энергии нетрудно получить соотношения:

$$\vec{v}_a = c^2 \vec{p}_a / E_a, \quad m_a^2 c^4 = E_a^2 - \vec{p}_a^2 c^2.$$

Эти соотношения годятся и для безмассовой частицы. Выражение, стоящее в правой части последнего равенства, является частным случаем более сложного инвариантного выражения $E_a E_b - \vec{p}_a \vec{p}_b c^2$. значение которого

легко найти в системе отсчета K_b , где частица b покоится, а скорость частицы a равна v_{ab} – относительной скорости частиц a и b . Получается

$$E_a E_b - \vec{p}_a \vec{p}_b c^2 = m_a m_b c^4 \gamma(v_{ab}).$$

Мы воспользуемся этим результатом ниже.

Релятивистские выражения для импульса и энергии системы невзаимодействующих частиц удовлетворяют принципу изоморфизма:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_a = \sum m_a \vec{v}_a \gamma(v_a) = M \vec{V} \gamma(V),$$

$$E = \sum E_a = \sum m_a c^2 \gamma(v_a) = M c^2 \gamma(V).$$

Для внутренней энергии системы (значение E при $V=0$) получаем

$$E^{(0)} = M c^2.$$

Скорость центра инерции \vec{V} и масса системы M выражаются через импульс и энергию системы такими же формулами, как и для одной частицы:

$$\vec{V} = c^2 \vec{P} / E = \sum E_a \vec{v}_a / \sum E_b,$$

$$M^2 c^4 = E^2 - \vec{P}^2 c^2 = \sum \sum (E_a E_b - \vec{p}_a \vec{p}_b c^2).$$

Учитывая полученное выше значение для выражения в скобках и то, что $\gamma(v_{ab}) \geq 1$, находим

$$M = \sqrt{\sum \sum m_a m_b \gamma(v_{ab})} \geq \sum m_a.$$

Видим, что *масса неаддитивна. В массу системы (в отсутствие взаимодействия) вносит вклад относительное движение частиц. Аддитивность достигается только в том случае, когда частицы не двигаются относительно друг друга.*

Как и в нерелятивистском случае, принцип изоморфизма требует добавления к орбитальному моменту частицы внутреннего момента (спина). В то же время так называемый лоренцев момент этому принципу удовлетворяет:

$$\vec{N}_a = c t \vec{p}_a - \vec{r}_a E_a / c, \quad \vec{N} = \sum \vec{N}_a = \sum (c t \vec{p}_a - \vec{r}_a E_a / c) = c t \vec{P} - \vec{R} E / c,$$

$$\vec{R} = \sum E_a \vec{r}_a / \sum E_b.$$

Таким образом, оказывается, что *частице, помимо параметров, характеризующих её способность участвовать в тех или иных взаимодействиях, необходимо приписать только две внутренние характеристики: массу (скаляр) и спин (аксиальный вектор).*

МОДЕРНИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ ИЗУЧЕНИЯ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Ревинская О.Г., Кравченко Н.С.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Момент инерции абсолютно твердого тела является одним из фундаментальных понятий курса общей физики, которое изучают при любом объеме данной учебной дисциплины. Однако традиционная методика изложения этого понятия ограничивается выводом (а чаще предъявлением)

формулы момента инерции нескольких тел простой формы, симметричных относительно центра инерции. В учебных экспериментах по определению момента инерции также используются симметричные физические тела. Анализ момента инерции тел несимметричной формы в современных курсах общей физики внимание не уделяется. Это приводит к тому, что для таких тел студенты не могут ни рассчитать момент инерции, ни определить его экспериментально. Рассмотрим, можно ли модернизировать существующую методику, чтобы восполнить данный пробел.

Пусть абсолютно твердое тело массой m_T , момент инерции которого J , покоится относительно некоторой оси OO' , расположенной перпендикулярно плоскости рис. 1 (сила тяжести также направлена перпендикулярно рисунку и скомпенсирована). Одна грань тела является плоской. Перпендикулярно этой грани с постоянной скоростью \vec{v} летит шарик массой m (материальная точка). После упругого удара о тело шарик отлетает в противоположном направлении со скоростью \vec{u} , а покоившееся до этого тело начинает равномерно вращаться (с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$) вокруг оси OO' . Влияние трения в рассматриваемой системе пренебрежимо мало. В таком случае уравнение динамики вращательного движения тела в момент удара ($\Delta t \rightarrow 0$ – длительность удара) можно записать в виде:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon} \Rightarrow \left[\vec{r}, \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \right] = J \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \text{ или } [\vec{r}, \Delta \vec{P}] = J \Delta \vec{\omega}.$$

В проекции на ось OO' полученное уравнение примет вид: $r \Delta P \sin \alpha = J \Delta \omega$. Учтем, что $r \sin \alpha = l$ – плечо силы, а до удара тело покоилось ($\omega_0 = 0$), поэтому $\Delta \omega = \omega - \omega_0 = \omega$. Следовательно, полученное уравнение можно записать в виде: $l \Delta P = J \omega$.

Скорость шарика до столкновения равна \vec{v} , а после столкновения \vec{u} . Изменение импульса ΔP шарика за время удара равно $\Delta P = mu + mv$. Из закона сохранения энергии $mu^2 = mv^2 - J\omega^2$. Тогда получим связь между угловой скоростью вращения тела и скоростью налетающего шарика: $J\omega + m\omega l^2 = 2mv l$. Учитывая, что угловая скорость вращения тела ω обратно пропорциональна периоду T , это уравнение можно переписать в виде: $J\pi + m\pi l^2 = mv l T$.

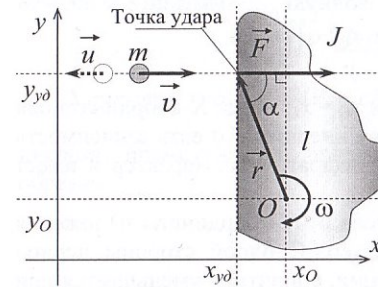


Рис. 1. Модель эксперимента

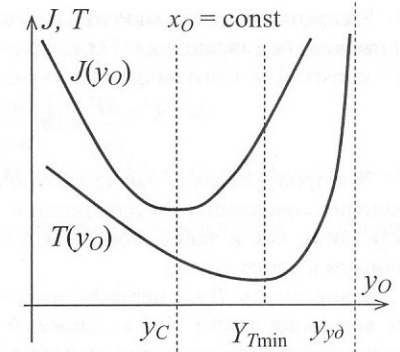


Рис. 2. Изменение момента инерции и периода вращения тела при перемещении оси вращения вдоль прямой, перпендикулярной линии удара

Таким образом, можно экспериментально определить момент инерции тела относительно произвольной оси вращения, перпендикулярной направлению движения шарика, приводящего тело в движение. Для этого достаточно измерить время, за которое равномерно вращающееся благодаря удару шарика тело совершает один оборот – период вращения T .

На основе того же выражения можно проанализировать, как период вращения тела будет зависеть от массы m и начальной скорости шарика v , плеча силы l (расстояния между осью вращения и линией удара) и момента инерции J тела. Для этого полученное уравнение перепишем в виде

$$T = \frac{J\pi}{mv l} + \frac{\pi l}{v}.$$

Отсюда видно, что чем больше момент инерции (при прочих одинаковых параметрах m , v , l), тем больше период вращения тела. Чем больше масса и начальная скорость шарика, тем меньше период вращения тела (тело совершает один оборот за меньшее время). Это позволяет подобрать оптимальные условия эксперимента.

Чтобы проанализировать зависимость периода вращения T от положения оси вращения (x_O, y_O) , необходимо заметить, что согласно теореме Штейнера момент инерции тела J изменяется с изменением положения оси вращения, т.к. $J = J_C + m_T(x_O - x_C)^2 + m_T(y_O - y_C)^2$, где x_C, y_C – координаты центра инерции тела. Если при любом положении оси вращения точка (с координатами $x_{y\delta}, y_{y\delta}$), в которой шарик ударяется о тело, остается неизменной, а ось Ox параллельна направлению движения шарика (направлению действия силы), то плечо силы $l = y_{y\delta} - y_O$ (рис. 1) также изменяется при перемещении оси вращения вдоль оси Oy . Тогда

$$T = \pi \frac{J_C + m_T(x_O - x_C)^2 + m_T(y_O - y_C)^2}{mv(y_{y\delta} - y_O)} + \frac{\pi(y_{y\delta} - y_O)}{v}.$$

Рассмотрим, как зависит период вращения тела от X-координаты положения оси вращения $T(x_O)$ при неизменном значении Y-координаты ($y_O = \text{const}$). Для этого найдем частную производную

$$\frac{\partial T}{\partial x_O} = 2\pi \frac{m_T(x_O - x_C)}{mv(y_{yO} - y_O)}$$

Эта производная обращается в ноль при $x_O = x_C$, когда X-координата оси вращения совпадает с X-координатой центра инерции. То есть зависимость $T(x_O)$ также как и зависимость $J(x_O)$ носит квадратичный характер и имеет минимум в точке $x_O = x_C$.

Зависимость $T(y_O)$ периода вращения тела от Y-координаты положения оси вращения носит более сложный характер. С одной стороны период увеличивается при удалении от центра инерции, с другой – уменьшается при удалении от линии удара. Поэтому частная производная

$$\frac{\partial T}{\partial y_O} = \pi \frac{J_C + m_T(x_O - x_C)^2 + m_T(y_O - y_C)^2 + 2m_T(y_O - y_C)(y_{yO} - y_O)}{mv(y_{yO} - y_O)^2} - \frac{\pi}{v}$$

обращается в ноль в точке, отличающейся от Y-координаты центра инерции $Y_{T\text{min}(y_O)} \neq y_C$. Зависимость $T(y_O)$ также имеет минимум, но этот минимум расположен ближе к точке удара, чем центр инерции тела (рис. 2). Для тел различной массы и формы сдвиг минимума зависимости $T(y_O)$ по сравнению с минимумом зависимости $J(y_O)$ может быть значительным. Так для тел массой около 5 кг протяженностью около 30 см (максимальный линейный размер) этот сдвиг может достигать 2,5–3,5 см.

Поэтому экспериментальное определение минимума зависимости $T(x_O)$ может служить для достаточно точного нахождения X-координаты центра инерции практически без расчета значений моментов инерции J , а экспериментальное определение минимума зависимости $T(y_O)$ может служить только для грубой (приблизительной) оценки значений Y-координаты центра инерции. Для точного определения Y-координаты центра инерции необходимо вычислить все значения момента инерции и найти положение минимума зависимости $J(y_O)$, но учитывая анализ зависимости $T(y_O)$, эти расчеты достаточно выполнить только вблизи минимума зависимости $T(y_O)$.

Таким образом, предложенная модель эксперимента создает условия для детального изучения момента инерции тела. При этом она достаточно проста и в тоже время налагает минимум ограничений на форму тела, изучаемого в эксперименте: в точке удара поверхность тела должна быть перпендикулярна направлению движения шарика, приводящего тело в движение. То есть в качестве тела можно использовать прямоугольную призму толщиной h с произвольной формой основания (сечения).

Если такое тело (призма) обладает постоянной плотностью ρ , то расчет теоретического значения момента инерции такого тела относительно оси, проходящей через начало координат и перпендикулярной основанию призмы, также доступен студентам младших курсов, изучающим параллельно с курсом общей физики интегральное исчисление в курсе

математического анализа. В этом случае вычисление момента инерции тела сводится к вычислению двойного интеграла в пределах, ограниченных сечением S призмы:

$$J = \rho \iiint r^2 dx dy dz = \rho h \iint_S (x^2 + y^2) dx dy.$$

Учитывая, что $\rho = m_T/V$, а объем тела $V = \iiint dx dy dz = h \iint_S dx dy$, момент

инерции прямоугольной призмы с сечением S , вычисляется следующим образом:

$$J = m_T \frac{\iint_S (x^2 + y^2) dx dy}{\iint_S dx dy}.$$

Если сечение прямоугольной призмы имеет сложную форму, его прямыми линиями можно разбить на несколько фрагментов S_1, S_2, \dots , каждый из которых будет являться простой геометрической фигурой (например, треугольником или сектором круга). Тогда каждый из интегралов в формуле для момента инерции можно представить как сумму интегралов по всем фрагментам сечения призмы:

$$J = m_T \frac{\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dx dy + \dots}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy + \dots}$$

Аналогично расчет координат ($x_C, y_C, z_C = h/2$), описывающих положение центра инерции такой призмы, с учетом всех выделенных фрагментов можно выполнить следующим образом:

$$x_C = \frac{\iint_S x dx dy}{\iint_S dx dy} = \frac{\iint_{S_1} x dx dy + \iint_{S_2} x dx dy + \dots}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy + \dots}, \quad y_C = \frac{\iint_S y dx dy}{\iint_S dx dy} = \frac{\iint_{S_1} y dx dy + \iint_{S_2} y dx dy + \dots}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy + \dots}$$

Все входящие в формулы для вычисления момента инерции и координат центра инерции интегралы легко вычисляются, если фрагмент сечения, в пределах которого выполняется интегрирование, имеет форму треугольника или сектора круга. Это открывает возможность конструирования формы тел (прямоугольных призм), моменты инерции которых студенты могут изучать в эксперименте. Ограничившись разбиением сечения призмы на 3 фрагмента, каждый из которых является либо сектором круга, либо треугольником, нами были сконструированы более 20 вариантов тел, несимметричных относительно центра инерции, с которыми можно выполнять описанные выше экспериментальные исследования. Некоторые из сконструированных нами тел представлены в таблице. С остальными вариантами тел можно ознакомиться в учебно-методическом пособии на сайте автора <http://ogrevinskaya.narod.ru/lab.html>

Таблица.
Варианты тел, несимметричных относительно центра инерции (тело имеет форму прямоугольной призмы)

Схема тела	Момент инерции относительно оси, проходящей через начало координат	Координаты центра инерции
	$\frac{m_T}{6} \frac{16a^4 + 16b^4 + 3b^4\pi}{4a^2 + 4b^2 + b^2\pi}$	$x_c = \frac{4a^3 + 2b^3 + b^3\sqrt{2}}{3(4a^2 + 4b^2 + b^2\pi)}$ $y_c = \frac{4(2a^3 + b^3(\sqrt{2}-1))}{3(4a^2 + 4b^2 + b^2\pi)}$
	$\frac{m_T}{6} \frac{16a^4 + 16b^4 + 3a^4\pi}{4a^2 + 4b^2 + a^2\pi}$	$x_c = \frac{4(4a^3 - a^3\sqrt{2}) + 2b^3}{3(4a^2 + 4b^2 + a^2\pi)}$ $y_c = \frac{4(a^3 - b^3 + a^3\sqrt{2})}{3(4a^2 + 4b^2 + a^2\pi)}$
	$\frac{m_T}{2} \frac{a^4 + 2b^4}{a^2 + 2b^2}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{a^3(2-\sqrt{2}) + 2b^3\sqrt{2}}{\pi(a^2 + 2b^2)}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{a^3\sqrt{2}}{\pi(a^2 + 2b^2)}$
	$\frac{2m_T}{3} \frac{a^4 + 2b^4}{a^2 + 2b^2}$	$x_c = \frac{1}{3} \frac{a^3 + 4b^3}{a^2 + 2b^2}$ $y_c = \frac{2}{3} \frac{a^3}{a^2 + 2b^2}$
	$\frac{m_T}{2} \frac{2a^4 + b^4}{2a^2 + b^2}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{2a^3 + b^3\sqrt{2}}{\pi(2a^2 + b^2)}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{2a^3 - b^3(2-\sqrt{2})}{\pi(2a^2 + b^2)}$
	$\frac{5m_T}{18} (a^2 + b^2)$	$x_c = \frac{1}{9} (a + 3b)$ $y_c = \frac{1}{9} (3a - b)$
	$\frac{m_T}{6} a^2 \frac{8 + 3\pi}{2 + \pi}$	$x_c = \frac{8}{3} \frac{a}{2 + \pi}$ $y_c = \frac{2}{3} \frac{a(2\sqrt{2}-1)}{2 + \pi}$
	$\frac{m_T}{18} (7a^2 + 5b^2)$	$x_c = \frac{1}{9} (2a + 3b)$ $y_c = \frac{1}{9} (3a - b)$
	$\frac{m_T}{6} \frac{16a^4 + 32b^4 + 3a^4\pi}{4a^2 + 8b^2 + a^2\pi}$	$x_c = \frac{4(4a^3 - a^3\sqrt{2}) + 3b^3}{3(4a^2 + 8b^2 + a^2\pi)}$ $y_c = \frac{4(a^3 - 3b^3 + a^3\sqrt{2})}{3(4a^2 + 8b^2 + a^2\pi)}$

Разработанная нами методика изучения момента инерции тел несимметричной формы была реализована в виде компьютерной лабораторной работы «Момент инерции твердого тела», в которой воспроизводятся все сконструированные нами варианты тел. В процессе выполнения работы студенты определяют период вращения тела, постепенно перемещая ось вращения сначала параллельно, а затем перпендикулярно линии удара. Вычислив момент инерции тела для каждого положения оси вращения, они экспериментально определяют положение центра инерции тела и его момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции. Анализ изменения периода вращения тела при перемещении оси вращения носит здесь вспомогательный характер. Полученные результаты студенты сравнивают с теоретическими расчетами, которые выполняют каждый для своего варианта формы тела. Кроме всего прочего данная работа иллюстрирует практическую значимость теоремы Штейнера. Опыт использования этой лабораторной работы в учебном процессе показал, что студенты успешно справляются с предложенным им исследованием. Форма тела привлекает внимание студентов, стимулируя желание предугадать расположение центра инерции не только изучаемого тела, но и остальных вариантов.

Таким образом, проведенные авторами исследования позволили модернизировать методику изучения момента инерции твердого тела в курсе общей физики, дополнив ее исследованиями тел несимметричной относительно центра инерции формы. Предложенная методика изучения момента инерции несимметричных тел может быть принята за основу при разработке аналогичной натурной лабораторной работы [1, 99–103], которая, несомненно, обогатит современный физический практикум. Многообразие сконструированных авторами несимметричных тел, доступных для теоретического и экспериментального изучения студентами младших курсов, открывает возможности обобщения полученных студентами выводов для тел произвольной формы. Это создает условия для глубокого и долговременного овладения студентами понятием «момент инерции абсолютно твердого тела».

Литература

1. Ревинская О.Г., Кравченко Н.С. Концепция развития лабораторного практикума по общей физике на основе дидактической модели научных экспериментальных исследований // Инновации в образовании – 2014 – № 1 – С. 93-106.

РАЗРАБОТКА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ КОНСТРУКЦИЙ НА ЗАНЯТИЯХ ПО ФИЗИКЕ В СТРОИТЕЛЬНОМ ВУЗЕ

Соболева В.В.

ГАОУ АО ВПО АГАСУ г. Астрахань

Одной из основных задач высшего профессионального образования является формирование у студента способности к саморазвитию,