

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Отделение естественных наук ШБИП

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
_____ Д.В. Чайковский
«__» _____ 2022 г.

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодМ–04
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53. 076

Ревинская О.Г.

Момент инерции твердого тела: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодМ–04 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 38 с.

УДК 53.076

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию
методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП

«___» _____ 20__ г.

Зав. ОЕН ШБИП

проф., доктор физ.-мат. наук

В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии

А.В. Макиенко

Рецензент

доктор тех. наук, профессор Томского политехнического университета

В.А. Москалев

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2002–2022

© Ревинская О.Г., Кравченко Н.С., 2002–2022

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2022

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодМ–04 ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Момент инерции твердого тела

Цель работы: изучение особенностей вращательного движения абсолютно твердого тела. Экспериментальное определение положения центра инерции и момента инерции твердого тела относительно оси вращения, проходящей через центр инерции.

1. Теоретическое содержание

Физическое тело считается *абсолютно твердым*, если в процессе движения тело не меняет ни своей формы, ни размеров.

Движение, при котором все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой OO' , называется *вращательным движением* или *вращением*, а прямая OO' – осью вращения тела.

1.1. Кинематические характеристики вращательного движения

Вращательное движение тела массой m_T описывается следующими кинематическими характеристиками: вектором поворота $\vec{\varphi}$, угловой скоростью $\vec{\omega}$, линейной скоростью вращения \vec{v} , угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$, моментом инерции J , кинетической энергией вращения $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$.

Вектор поворота $\vec{\varphi}$ характеризуется углом поворота φ относительно некоторого начального положения и направлением вращения (рис. 1). Угловая скорость $\vec{\omega}$ описывает быстроту вращения тела и характеризуется углом поворота в единицу времени и направлением вращения:

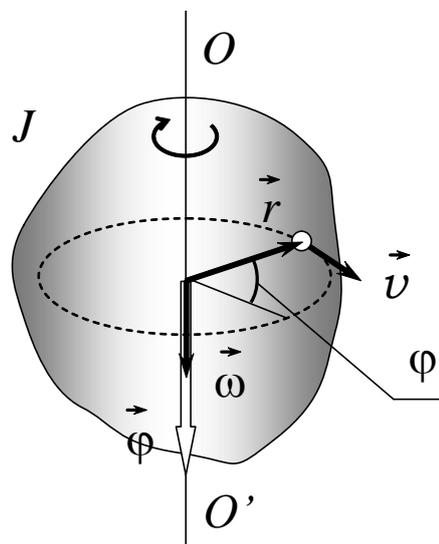


Рис. 1

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \text{ и } \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Если угловая скорость не меняется со временем ($\omega = \text{const}$), **вращение** называется **равномерным**. Промежуток времени $T = 2\pi/\omega$, в течение которого тело, равномерно вращаясь, совершает один оборот, называется **периодом вращения**.

Линейная скорость вращения \vec{v} равна векторному произведению угловой скорости $\vec{\omega}$ на радиус-вектор \vec{r} , проведенный от оси вращения к данной точке тела (рис. 1). Линейная скорость вращения \vec{v} описывает быстроту движения произвольной точки тела, расположенной на расстоянии r от оси OO' , и характеризуется модулем скорости v и направлением, которое перпендикулярно вектору \vec{r} (линейная скорость направлена вдоль касательной к траектории данной точки):

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \text{ и } v = \omega r.$$

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ описывает быстроту изменения угловой скорости: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. Очевидно, что для равномерно вращающегося тела угловое ускорение равно нулю.

Величина J , равная сумме произведений масс m_i всех материальных точек, образующих физическое тело, на квадраты расстояний r_i до оси вращения, называется **моментом инерции тела относительно оси**:

$$J = \sum_i m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$J = \int r^2 dm.$$

Если вращающееся тело поступательно не движется, то кинетическая энергия тела E_k является алгебраической суммой кинетических энергий E_i вращательного движения всех материальных точек

$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Для равномерно вращающегося тела $v_i = \omega r_i$, тогда кинетическая энергия равномерно вращающегося тела

$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i r_i^2}{2} \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{J\omega^2}{2},$$

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Из сравнения полученной формулы с выражением для кинетической энергии тела при поступательном движении ($E_k = \frac{m_T v^2}{2}$), следует, что **момент инерции J является мерой инертности** тела при вращательном движении.

Центром масс или **центром инерции** называют геометрическую точку, характеризующую распределение масс в теле (системе материальных точек). Понятие центра масс отличается от понятия центра тяжести тем, что последнее имеет смысл только для тела (системы тел), находящегося в некотором поле тяжести; понятие же центра масс не связано ни с каким силовым полем и имеет смысл для любой механической системы. Для тела (системы тел), находящегося в однородном поле тяжести, положения центра масс и центра тяжести совпадают.

Положение центра масс (инерции) \vec{R}_C абсолютно твердого тела можно определить следующим образом:

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m_T} \sum_i m_i \vec{r}_i.$$

В случае непрерывного распределения масс суммирование сводится к интегрированию:

$$\vec{R}_C = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{1}{m_T} \int \vec{r} dm.$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс (центр инерции), то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера**: момент инерции тела J относительно любой оси вращения, параллельной оси вращения, проходящей через центр масс, равен моменту его инерции J_C относительно оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы m_T тела на квадрат расстояния R_C между осями.

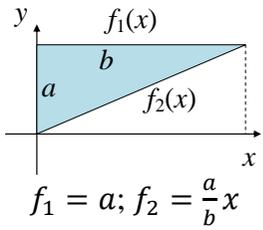
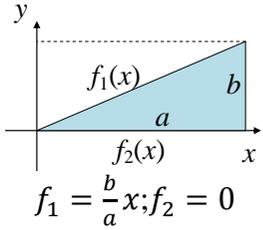
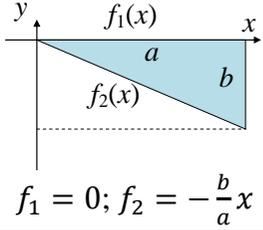
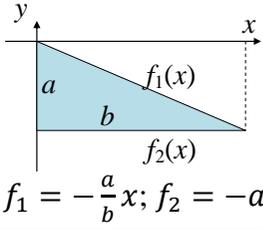
$$J = J_C + m_T R_C^2.$$

Таким образом, из теоремы Штейнера следует, что тело имеет минимальный момент инерции, когда вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс (инерции).

1.2. Расчет момента инерции тела, вращающегося относительно оси, проходящей через начало координат

Рассмотрим, как теоретически рассчитать момент инерции J тела массой $m_T = \rho \cdot V$ с постоянной плотностью ρ . Для этого необходимо вычислить интеграл $J = \int r^2 dm$ по всему объему тела V .

Таблица 1. Таблица интегралов (декартова система координат)

№	Геометрическая фигура	$S = \iint dx dy$	$\iint x dx dy$	$\iint y dx dy$	$\iint (x^2 + y^2) dx dy$
1	 <p>$f_1 = a; f_2 = \frac{a}{b}x$</p>	$\int_0^b dx \left(\int_{\frac{a}{b}x}^a dy \right) = \frac{ab}{2}$	$\int_0^b x dx \left(\int_{\frac{a}{b}x}^a dy \right) = \frac{ab^2}{6}$	$\int_0^b dx \left(\int_{\frac{a}{b}x}^a y dy \right) = \frac{a^2 b}{3}$	$\int_0^b dx \left(\int_{\frac{a}{b}x}^a (x^2 + y^2) dy \right) = \frac{ab}{12}(3a^2 + b^2)$
2	 <p>$f_1 = \frac{b}{a}x; f_2 = 0$</p>	$\int_0^a dx \left(\int_0^{\frac{b}{a}x} dy \right) = \frac{ab}{2}$	$\int_0^a x dx \left(\int_0^{\frac{b}{a}x} dy \right) = \frac{a^2 b}{3}$	$\int_0^a dx \left(\int_0^{\frac{b}{a}x} y dy \right) = \frac{ab^2}{6}$	$\int_0^a dx \left(\int_0^{\frac{b}{a}x} (x^2 + y^2) dy \right) = \frac{ab}{12}(3a^2 + b^2)$
3	 <p>$f_1 = 0; f_2 = -\frac{b}{a}x$</p>	$\int_0^a dx \left(\int_{-\frac{b}{a}x}^0 dy \right) = \frac{ab}{2}$	$\int_0^a x dx \left(\int_{-\frac{b}{a}x}^0 dy \right) = \frac{a^2 b}{3}$	$\int_0^a dx \left(\int_{-\frac{b}{a}x}^0 y dy \right) = -\frac{ab^2}{6}$	$\int_0^a dx \left(\int_{-\frac{b}{a}x}^0 (x^2 + y^2) dy \right) = \frac{ab}{12}(3a^2 + b^2)$
4	 <p>$f_1 = -\frac{a}{b}x; f_2 = -a$</p>	$\int_0^b dx \left(\int_{-a}^{-\frac{a}{b}x} dy \right) = \frac{ab}{2}$	$\int_0^b x dx \left(\int_{-a}^{-\frac{a}{b}x} dy \right) = \frac{ab^2}{6}$	$\int_0^b dx \left(\int_{-a}^{-\frac{a}{b}x} y dy \right) = -\frac{a^2 b}{3}$	$\int_0^b dx \left(\int_{-a}^{-\frac{a}{b}x} (x^2 + y^2) dy \right) = \frac{ab}{12}(3a^2 + b^2)$

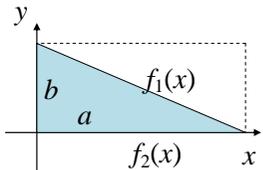
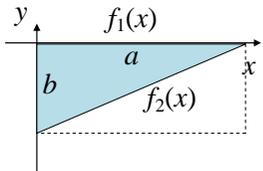
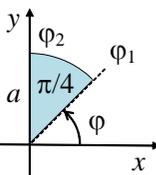
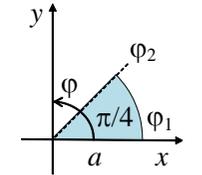
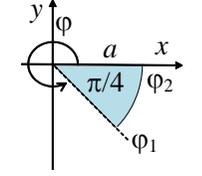
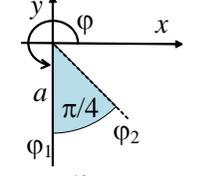
№	Геометрическая фигура	$S = \iint dx dy$	$\iint x dx dy$	$\iint y dx dy$	$\iint (x^2 + y^2) dx dy$
5	 <p>$f_1 = \frac{b}{a}(a-x); f_2 = 0$</p>	$\int_0^a dx \left(\int_0^{\frac{a}{b}(a-x)} dy \right) = \frac{ab}{2}$	$\int_0^a x dx \left(\int_0^{\frac{a}{b}(a-x)} dy \right) = \frac{a^2 b}{6}$	$\int_0^a dx \left(\int_0^{\frac{a}{b}(a-x)} y dy \right) = \frac{ab^2}{6}$	$\int_0^a dx \left(\int_0^{\frac{a}{b}(a-x)} (x^2 + y^2) dy \right) = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)$
6	 <p>$f_1 = 0; f_2 = -\frac{b}{a}(a-x)$</p>	$\int_0^a dx \left(\int_{-\frac{b}{a}(a-x)}^0 dy \right) = \frac{ab}{2}$	$\int_0^a x dx \left(\int_{-\frac{b}{a}(a-x)}^0 dy \right) = \frac{a^2 b}{6}$	$\int_0^a dx \left(\int_{-\frac{b}{a}(a-x)}^0 y dy \right) = -\frac{ab^2}{6}$	$\int_0^a dx \left(\int_{-\frac{b}{a}(a-x)}^0 (x^2 + y^2) dy \right) = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)$

Таблица 2. Таблица интегралов (полярная система координат)

№	Геометрическая фигура	$S = \iint r dr d\varphi$	$\iint x dx dy = \iint r^2 dr \cos \varphi d\varphi$	$\iint y dx dy = \iint r^2 dr \sin \varphi d\varphi$	$\iint (x^2 + y^2) dx dy = \iint r^3 dr d\varphi$
1	 <p>$\varphi_1 = \pi/4; \varphi_2 = \pi/2$</p>	$\int_0^a r dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{a^2 \pi}{8}$	$\int_0^a r^2 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{a^3}{6}(2 - \sqrt{2})$	$\int_0^a r^2 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{a^3}{6}\sqrt{2}$	$\int_0^a r^3 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{a^4 \pi}{16}$

№	Геометрическая фигура	$S = \iint r dr d\varphi$	$\iint x dx dy = \iint r^2 dr \cos \varphi d\varphi$	$\iint y dx dy = \iint r^2 dr \sin \varphi d\varphi$	$\iint (x^2 + y^2) dx dy = \iint r^3 dr d\varphi$
2	 <p>$\varphi_1 = 0; \varphi_2 = \pi/4$</p>	$\int_0^a r dr \int_0^{\pi/4} d\varphi = \frac{a^2 \pi}{8}$	$\int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi/4} \cos \varphi d\varphi = \frac{a^3}{6} \sqrt{2}$	$\int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = \frac{a^3}{6} (2 - \sqrt{2})$	$\int_0^a r^3 dr \int_0^{\pi/4} d\varphi = \frac{a^4 \pi}{16}$
3	 <p>$\varphi_1 = -\pi/4; \varphi_2 = 0$</p>	$\int_0^a r dr \int_{-\pi/4}^0 d\varphi = \frac{a^2 \pi}{8}$	$\int_0^a r^2 dr \int_{-\pi/4}^0 \cos \varphi d\varphi = \frac{a^3}{6} \sqrt{2}$	$\int_0^a r^2 dr \int_{-\pi/4}^0 \sin \varphi d\varphi = -\frac{a^3}{6} (2 - \sqrt{2})$	$\int_0^a r^3 dr \int_{-\pi/4}^0 d\varphi = \frac{a^4 \pi}{16}$
4	 <p>$\varphi_1 = -\pi/2; \varphi_2 = -\pi/4$</p>	$\int_0^a r dr \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} d\varphi = \frac{a^2 \pi}{8}$	$\int_0^a r^2 dr \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos \varphi d\varphi = \frac{a^3}{6} (2 - \sqrt{2})$	$\int_0^a r^2 dr \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \sin \varphi d\varphi = -\frac{a^3}{6} \sqrt{2}$	$\int_0^a r^3 dr \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} d\varphi = \frac{a^4 \pi}{16}$

Если плотность ρ постоянная ($dm = \rho dV$), можно записать

$$J = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dV.$$

В общем случае, вычисление момента инерции тела относительно некоторой оси сводится к вычислению тройного интеграла. **В декартовых координатах** элементарный объем $dV = dxdydz$, поэтому момент инерции $J = \rho \iiint r^2 dxdydz$.

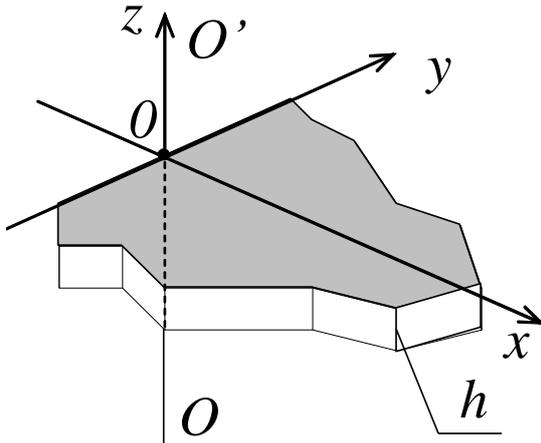


Рис. 2

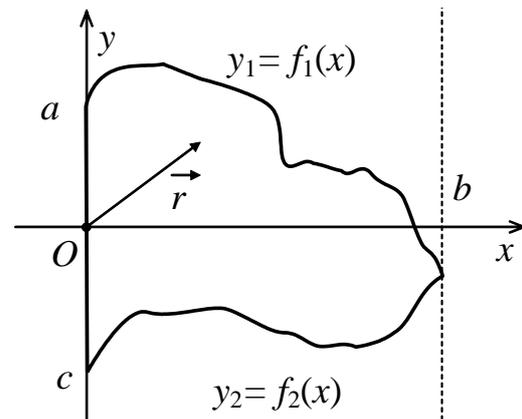


Рис. 3

Рассмотрим тело, являющееся прямоугольной призмой, основания которой перпендикулярны оси OZ (рис. 2). Тело имеет постоянную толщину h (в направлении оси OZ) и вращается вокруг оси OZ (все сечения тела любой плоскостью, параллельной основанию, одинаковы). Тогда расстояние r от любой точки тела до оси вращения ($r^2 = x^2 + y^2$) не зависит от z , и при вычислении момента инерции интеграл по dz легко берется: $\int_0^h dz = h$. Следовательно, тройной интеграл сводится к двойному:

$$J = \rho \iiint r^2 dxdydz = \rho \iint (x^2 + y^2) dxdy \int_0^h dz = \rho h \iint (x^2 + y^2) dxdy,$$

$$J = \rho h \iint (x^2 + y^2) dxdy.$$

Для вычисления плотности $\rho = m/V$ необходимо рассчитать объем V , занимаемый телом. В декартовой системе координат

$$V = \int dV = \iiint dxdydz.$$

Так как толщина прямоугольной призмы, основание которой параллельно плоскости XOY, постоянна (в любом месте тела равна h), то

$$\int_0^h dz = h \Rightarrow V = \iiint dx dy dz = dx dy \int_0^h dz = h \iint dx dy.$$

Тогда момент инерции прямоугольной призмы массой m_T можно рассчитать

$$\begin{aligned} J &= \rho h \iint (x^2 + y^2) dx dy = \frac{m_T}{V} h \iint (x^2 + y^2) dx dy = \\ &= m_T \frac{\iint (x^2 + y^2) dx dy}{\iint dx dy}. \end{aligned}$$

Для вычисления каждого из оставшихся двойных интегралов достаточно рассмотреть любое сечение призмы плоскостью, перпендикулярной оси вращения (например, плоскостью ХОУ), или основание призмы. Сечение призмы можно рассматривать как фигуру, ограниченную совокупностью кривых, уравнение каждой из которых в декартовой системе координат можно представить в виде $y_i = f_i(x)$ (рис. 3). Тогда интегрирование по y осуществляется в пределах, ограниченных этими функциями $y_i = f_i(x)$, а по x – соответствующими им отрезками. Например, на рис. 3 сечение прямоугольной призмы плоскостью ХОУ ограничено двумя кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \iint (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} (x^2 + y^2) dy = \int_0^b dx \cdot \left(yx^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{f_2(x)}^{f_1(x)}, \\ \iint dx dy &= \int_0^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy = \int_0^b dx \cdot (y) \Big|_{f_2(x)}^{f_1(x)}. \end{aligned}$$

Подставив $f_1(x)$ и $f_2(x)$ вместо y , получим интегралы, подынтегральные выражения которых зависят только от x . Следует заметить, что подынтегральные выражения в этих интегралах будут иметь различный вид для тел, имеющих сечения разной формы (разные $f_1(x)$ и $f_2(x)$). Например, для тела, сечением которого является фигура № 1 из таблицы 1, $f_1(x) = a$, $f_2(x) = \frac{a}{b}x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} (x^2 + y^2) dy &= \int_0^b dx \cdot \left(yx^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{\frac{a}{b}x}^a = \\ &= \int_0^b \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} - \frac{a}{b}x^3 - \frac{a^3}{3b^3}x^2 \right) dx = \frac{ab}{12} (3a^2 + b^2); \end{aligned}$$

$$\int_0^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy = \int_0^b dx \cdot (y) \Big|_{\frac{a}{b}x}^a = \int_0^b \left(a - \frac{a}{b}x \right) dx = \frac{ab}{2}.$$

Момент инерции такой фигуры будет рассчитываться следующим образом

$$J = m_T \frac{\iint (x^2 + y^2) dx dy}{\iint dx dy} = \frac{m_T}{6} (3a^2 + b^2).$$

Интегралы вида $\iint (x^2 + y^2) dx dy$ и $\iint dx dy$, необходимые для вычисления момента инерции относительно оси вращения, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскости XOY, прямоугольных призм с сечениями другой формы приведены в таблице 1.

Для прямоугольных призм, сечения которых представлены в таблице 2, для вычисления момента инерции удобнее использовать **цилиндрические координаты** (r, φ, z). В этой системе координат элементарный объем $dV = dz r dr d\varphi$, тогда момент инерции прямоугольной призмы относительно оси, перпендикулярной ее основанию и проходящей через начало координат, можно вычислить следующим образом

$$J = \rho \int r^2 dV = m_T \frac{\int r^2 dV}{\int dV} = m_T \frac{\iiint dz r^3 dr d\varphi}{\iiint dz r dr d\varphi} = m_T \frac{\iint d\varphi r^3 dr}{\iint d\varphi r dr}.$$

Так как призма прямоугольная, интегрирование по dz также (как и в декартовых координатах) осуществляется независимо от двух других направлений ($\int_0^h dz = h$) и в числителе и в знаменателе.

Для вычисления каждого из оставшихся интегралов вновь достаточно рассмотреть сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения, но кривые, ограничивающие сечение, должны быть записаны **в полярных координатах** (r, φ). Такая форма записи удобна, например, если сечение имеет форму сектора круга радиусом a (таблица 2). Тогда в полярных координатах сечение ограничено прямыми $\varphi_1 = \text{const}$, $\varphi_2 = \text{const}$ и $r = a$. В этом случае интегралы по $d\varphi$ и по dr вычисляются независимо друг от друга

$$J = m_T \frac{\iint d\varphi r^3 dr}{\iint d\varphi r dr} = m_T \frac{\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \cdot \int_0^a r^3 dr}{\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \cdot \int_0^a r dr} = m_T \frac{\int_0^a r^3 dr}{\int_0^a r dr} = m_T \frac{a^2}{2}.$$

Таким образом, момент инерции относительно оси, перпендикулярной основанию и проходящей через начало координат, всех приведенных в таблице 2 тел одинаков.

Если сечение прямоугольной призмы имеет более сложную форму, которую не удастся описать двумя кривыми, то его прямыми лини-

ями можно разбить на несколько фрагментов S_1, S_2, \dots , каждый из которых ограничен двумя простыми функциональными зависимостями вида $y_i = f_i(x)$ (например, рис. 4) в декартовой системе координат. Тогда интегралы $\iint (x^2 + y^2) dx dy$ и $\iint dx dy$ по всему сечению S можно вычислить как сумму аналогичных интегралов по каждому из его фрагментов S_1, S_2, \dots

$$\iint_S (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dx dy + \dots$$

$$\text{и } \iint_S dx dy = \iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy + \dots$$

$$\text{Тогда } J = m_T \frac{\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dx dy + \dots}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy + \dots}$$

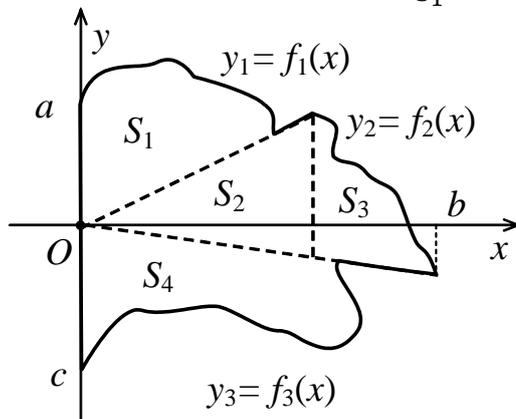


Рис. 4

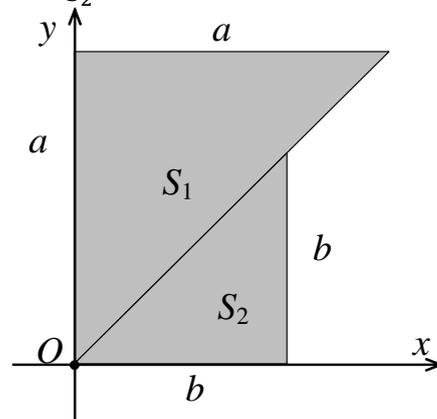


Рис. 5

Интегралы по каждому из фрагментов S_1, S_2, \dots сечения можно вычислить отдельно или воспользоваться данными, приведенными в таблице 1. Например, для вычисления момента инерции тела, сечение которого приведено на рис. 5, можно воспользоваться интегралами из таблицы 1, соответствующими первой и второй геометрической фигуре, если считать катеты этих прямоугольных треугольников равными по длине (a – для первой фигуры; b – для второй).

Тогда для фрагмента S_1 сечения интегралы равны (из таблицы 1):

$$\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{a^4}{3}, \quad \iint_{S_1} dx dy = \frac{a^2}{2}.$$

Для фрагмента S_2 сечения (из таблицы 1):

$$\iint_{S_2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{b^4}{3}, \quad \iint_{S_2} dx dy = \frac{b^2}{2}.$$

Момент инерции этого тела (прямоугольной призмы) относительно оси, перпендикулярной плоскости XOY и проходящей через начало координат, можно рассчитать следующим образом:

$$J = m_T \frac{\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dx dy}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy} = m_T \frac{2 a^4 + b^4}{3 a^2 + b^2}.$$

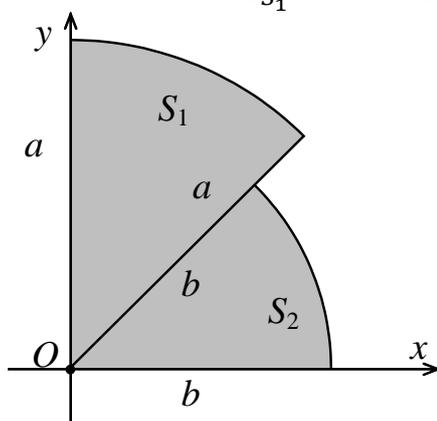


Рис. 6

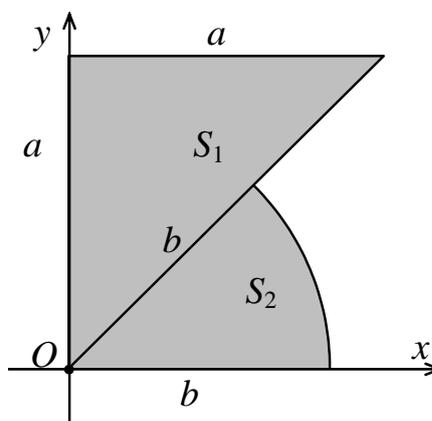


Рис. 7

Для вычисления интегралов по каждому из фрагментов сечения можно (при необходимости) перейти в полярные координаты и далее воспользоваться таблицей 2. Например, изображенное на рис. 6 сечение тела, состоит из сегментов двух кругов (радиусами a и b , соответственно). Тогда из таблицы 2 для фрагментов сечения S_1 и S_2 , соответственно, интегралы равны:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{S_1} r^3 dr d\varphi = \frac{a^4 \pi}{16}, \quad \iint_{S_1} dx dy = \iint_{S_1} r dr d\varphi = \frac{a^2 \pi}{8}; \\ \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{S_2} r^3 dr d\varphi = \frac{b^4 \pi}{16}, \quad \iint_{S_2} dx dy = \iint_{S_2} r dr d\varphi = \frac{b^2 \pi}{8}. \end{aligned}$$

Момент инерции этого тела (прямоугольной призмы) относительно оси, перпендикулярной плоскости XOY и проходящей через начало координат, можно рассчитать следующим образом:

$$J = m_T \frac{\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dx dy}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy} = m_T \frac{1 a^4 + b^4}{2 a^2 + b^2}.$$

Рассуждая аналогично, легко вычислить момент инерции тела, сечение которого приведено на рис. 7, воспользовавшись интегралами, приведенными в таблицах 1 и 2.

$$\text{Из таблицы 1: } \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{a^4}{3}, \quad \iint_{S_1} dx dy = \frac{a^2}{2}.$$

Из таблицы 2:
$$\iint_{S_2} (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{S_2} r^3 dr d\varphi = \frac{b^4 \pi}{16},$$

$$\iint_{S_2} dx dy = \iint_{S_2} r dr d\varphi = \frac{b^2 \pi}{8}.$$

Момент инерции этого тела (прямоугольной призмы) относительно оси, перпендикулярной плоскости XOY и проходящей через начало координат, можно рассчитать следующим образом:

$$J = m_T \frac{\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dx dy}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy} = \frac{m_T}{6} \frac{16a^4 + 3b^4 \pi}{4a^2 + b^2 \pi}.$$

Аналогичным образом можно рассчитать момент инерции и других прямоугольных призм, сечение (основание) которых имеют более сложную форму.

1.3. Расчет положения центра инерции

Для тела с постоянной плотностью ρ положение центра масс задается радиус-вектором \vec{R}_C , при вычислении которого легко перейти к интегрированию по объему тела

$$\vec{R}_C = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\rho \int \vec{r} dV}{\rho \int dV} = \frac{\int \vec{r} dV}{\int dV} \quad \text{или} \quad \vec{R}_C = \frac{\iiint \vec{r} dx dy dz}{\iiint dx dy dz}.$$

Тогда координаты x_C, y_C, z_C центра инерции в декартовой системе координат определяются следующим образом:

$$x_C = \frac{\iiint x dx dy dz}{\iiint dx dy dz}, \quad y_C = \frac{\iiint y dx dy dz}{\iiint dx dy dz}, \quad z_C = \frac{\iiint z dx dy dz}{\iiint dx dy dz}.$$

Как было показано ранее, для тела, имеющего форму прямоугольной призмы высотой h , интегрирование по dz не зависит от интегрирования по $dx dy$. В этом случае формулы для координат центра инерции примут вид:

$$x_C = \frac{\int_0^h dz \iint x dx dy}{\int_0^h dz \iint dx dy} = \frac{h \iint x dx dy}{h \iint dx dy} = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy},$$

$$y_C = \frac{\int_0^h dz \iint y dx dy}{\int_0^h dz \iint dx dy} = \frac{h \iint y dx dy}{h \iint dx dy} = \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy},$$

$$z_C = \frac{\int_0^h z dz \iint dx dy}{\int_0^h dz \iint dx dy} = \frac{h^2 \iint dx dy}{2h \iint dx dy} = \frac{h}{2}.$$

Таким образом, в направлении оси OZ центр инерции будет находиться на одинаковом расстоянии $h/2$ от верхнего и нижнего оснований призмы: $z_C = h/2$. Остается вычислить положение центра инерции в плоскости XOY. Для этого необходимо вычислить ряд двойных интегралов:

$$x_C = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy} \text{ и } y_C = \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy}.$$

Вычисление интеграла $\iint dx dy$ рассматривалось ранее.

Интегралы вида $\iint x dx dy$ и $\iint y dx dy$ вычисляются аналогично интегралам, рассмотренным ранее, используя функциональные зависимости $y_i = f_i(x)$, описывающие границы сечения (основания) призмы плоскостью XOY.

Например, для определения координат центра инерции прямоугольной призмы (рис. 3), сечение которой ограничено двумя функциональными зависимостями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, необходимо вычислить следующие интегралы:

$$\iint x dx dy = \int_0^b x dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy = \int_0^b x dx \cdot (y) \Big|_{f_2(x)}^{f_1(x)}$$

$$\iint y dx dy = \int_0^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} y dy = \int_0^b dx \cdot \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{f_2(x)}^{f_1(x)}$$

Далее вместо y необходимо подставить пределы интегрирования ($f_1(x)$ и $f_2(x)$), в результате чего двукратные интегралы сводятся к однократным интегралам по dx .

В частности при нахождении координат центра инерции прямоугольной призмы, сечением которой является геометрическая фигура № 1 из таблицы 1, искомые интегралы примут вид:

$$\int_0^b x dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy = \int_0^b x dx \cdot (y) \Big|_{\frac{a}{b}x}^a = \int_0^b \left(a - \frac{a}{b}x \right) \cdot x dx = \frac{ab^2}{6};$$

$$\int_0^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} y dy = \int_0^b dx \cdot \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{\frac{a}{b}x}^a = \int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}x^2 \right) \cdot dx = \frac{a^2b}{3}.$$

Тогда $x_C = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy} = \frac{b}{3}$, $y_C = \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy} = \frac{2}{3}a$, т.к. $\iint dx dy = \frac{ab}{2}$.

Если границы сечения прямоугольной призмы удобнее выразить в полярных координатах, то и при вычислении интегралов $\iint x dx dy$ и $\iint y dx dy$ также переходят к полярным координатам:

$$\iint x dx dy = \iint r^2 dr \cos \varphi d\varphi, \quad \iint y dx dy = \iint r^2 dr \sin \varphi d\varphi.$$

В таблицах 1 и 2 кроме интегралов $\iint (x^2 + y^2) dx dy$ и $\iint dx dy$ для тех же геометрических фигур приведены также интегралы вида $\iint x dx dy$ и $\iint y dx dy$. Это позволяет рассчитывать координаты центра инерции для прямоугольных призм с сечениями различной формы, в том числе и для тел, границы сечений которых описываются несколькими (более чем двумя) функциональными зависимостями $y_i = f_i(x)$.

Так же как и при вычислении интегралов $\iint (x^2 + y^2) dx dy$ и $\iint dx dy$ сечение S сложной формы можно разделить на несколько непесекающихся фрагментов S_1, S_2, \dots (рис. 4–7). Тогда интегралы $\iint x dx dy$ и $\iint y dx dy$ по всему сечению S можно также вычислить как сумму аналогичных интегралов по каждому из его фрагментов S_1, S_2, \dots

$$\begin{aligned} \iint_S x dx dy &= \iint_{S_1} x dx dy + \iint_{S_2} x dx dy + \dots, \\ \iint_S y dx dy &= \iint_{S_1} y dx dy + \iint_{S_2} y dx dy + \dots \end{aligned}$$

А координаты центра инерции можно рассчитать следующим образом:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\iint_S x dx dy}{\iint_S dx dy} = \frac{\iint_{S_1} x dx dy + \iint_{S_2} x dx dy + \dots}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy + \dots}, \\ y_c &= \frac{\iint_S y dx dy}{\iint_S dx dy} = \frac{\iint_{S_1} y dx dy + \iint_{S_2} y dx dy + \dots}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy + \dots} \end{aligned}$$

Например, для призмы, сечение которой изображено на рис. 7

$$\iint_{S_1} dx dy = \frac{a^2}{2}, \quad \iint_{S_1} x dx dy = \frac{a^3}{6}, \quad \iint_{S_1} y dx dy = \frac{a^3}{3} \quad (\text{из таблицы 1})$$

$$\iint_{S_2} dx dy = \iint_{S_2} r dr d\varphi = \frac{b^2 \pi}{8}, \quad \iint_{S_2} x dx dy = \iint_{S_2} r^2 dr \cos \varphi d\varphi = \frac{b^3}{6} \sqrt{2},$$

$$\iint_{S_2} y dx dy = \iint_{S_2} r^2 dr \sin \varphi d\varphi = \frac{b^3}{6} (2 - \sqrt{2}) \quad (\text{из таблицы 2})$$

Координаты центра инерции такой призмы

$$x_c = \frac{\iint_S x dx dy}{\iint_S dx dy} = \frac{\iint_{S_1} x dx dy + \iint_{S_2} x dx dy + \dots}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy + \dots} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3 + b^3 \sqrt{2}}{4a^2 + b^2 \pi}$$

$$y_c = \frac{\iint_S y dx dy}{\iint_S dx dy} = \frac{\iint_{S_1} y dx dy + \iint_{S_2} y dx dy + \dots}{\iint_{S_1} dx dy + \iint_{S_2} dx dy + \dots} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2a^3 + b^3(2 - \sqrt{2})}{4a^2 + b^2 \pi}$$

Аналогичным образом (разделив сечение на несколько простых по форме фрагментов) можно рассчитать координаты центра инерции и других прямоугольных призм, сечение (основание) которых имеют более сложную форму.

1.4. Динамика вращательного движения

В динамике вращательного движения основную роль играет не сила \vec{F} , действующая на тело, а момент силы \vec{M} . **Моментом силы \vec{M}** относительно некоторой точки O называется векторное произведение радиус-вектора \vec{r} , проведенного из точки O в точку приложения силы, на силу \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Вектор \vec{M} направлен перпендикулярно плоскости, которую образуют вектора \vec{r} и \vec{F} (рис. 8). Модуль момента силы равен

$$M = Fr \sin \alpha = Fl,$$

где α – угол между \vec{r} и \vec{F} , $l = r \sin \alpha$ – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы \vec{F} . Величина l называется **плечом силы \vec{F}** .

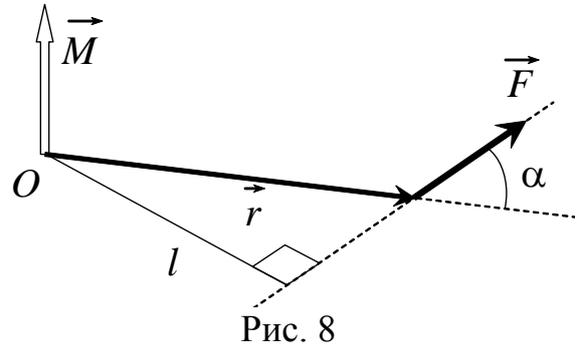


Рис. 8

Получим уравнение динамики для вращательного движения абсолютно твердого тела. Для

этого запишем второй закон Ньютона $\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$ для каждой материальной точки, образующей твердое тело (где \vec{F}_i – суммарная сила, действующая на i -ую материальную точку массой m_i ; $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ – импульс i -ой материальной точки). Домножим второй закон Ньютона слева векторно на радиус-вектор \vec{r}_i , проведенный от оси вращения в точку приложения силы \vec{F}_i , и просуммируем по всем материальным точкам:

$$\sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \sum_i \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] \text{ или } \vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right].$$

Рассмотрим векторное произведение:

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] = \left[\vec{r}_i, \frac{m_i d\vec{v}_i}{dt} \right] = m_i \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right].$$

Учитывая (рис. 1) связь линейной скорости вращательного движения с угловой скоростью: $\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$, а также $d\vec{\omega}/dt = \vec{\varepsilon}$, получим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{v}_i &= \left[\frac{d}{dt} \vec{\omega}, \vec{r}_i \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d}{dt} \vec{r}_i \right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i] + [\vec{\omega}, \vec{v}_i], \\ \text{Тогда } \vec{M} &= \sum_i \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right] = \sum_i m_i [\vec{r}_i, ([\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i] + [\vec{\omega}, \vec{v}_i])] = \\ &= \sum_i m_i ([\vec{r}_i, [\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i]] + [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{v}_i]]) = \sum_i m_i [\vec{r}_i, [\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i]] = \vec{\varepsilon} \sum_i m_i r_i^2 = J\vec{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Так как по правилам вычисления векторного произведения вектор $[\vec{\omega}, \vec{v}_i]$ параллелен (рис. 1) вектору $\vec{r}_i \Rightarrow [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{v}_i]] = 0$, а вектор $[\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i]$ перпендикулярен вектору $\vec{r}_i \Rightarrow [\vec{r}_i, [\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i]] = \vec{\varepsilon} r_i^2$. Таким образом, основное уравнение динамики для вращательного движения абсолютно твердого тела примет вид

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon} \text{ или } \vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}.$$

Закон динамики вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси: угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ абсолютно твердого тела прямо пропорционально суммарному моменту сил \vec{M} , действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела J .

2. Рабочие формулы

2.1. Момент инерции тела относительно произвольной оси вращения

Рассмотрим твердое тело массой m_T , способное вращаться вокруг некоторой оси OO' , расположенной перпендикулярно плоскости рисунка (рис. 9, сила тяжести также направлена перпендикулярно рисунку и скомпенсирована). Одна грань тела является плоской. Перпендикулярно этой грани летит шарик массой m с постоянной скоростью \vec{v} . После упругого удара о тело шарик отлетает в противоположном направлении со скоростью \vec{u} , а покоившееся до этого тело начинает равномерно вращаться (с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$) вокруг оси OO' . Влияние трения в рассматриваемой системе пренебрежимо мало.

Для того чтобы определить величину угловой скорости ω , с которой будет вращаться тело, запишем уравнение динамики $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$. Вращение возникает только за счет удара шарика. При этом за время удара Δt импульс шарика изменился на величину $\Delta\vec{P}$. Согласно третьему закону Ньютона сила $-\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$, действующая на шарик,

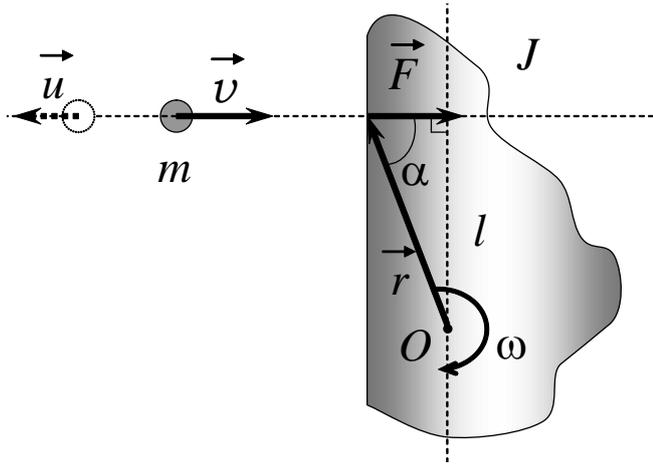


Рис. 9

равна силе действующей на тело $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$, но направлена в противоположную сторону. На тело действует только одна сила \vec{F} (со стороны шарика) в точке, расположенной на расстоянии r от оси вращения. Момент силы \vec{M} , действующей на тело, равен $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \left[\vec{r}, \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \right]$. За время удара угловая скорость тела изменилась на величину $\Delta\omega$, и угловое ускорение тела во время взаимодействия с шариком равно $\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$. Тогда уравнение динамики примет вид:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon} \Rightarrow \left[\vec{r}, \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \right] = J \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \text{ или } [\vec{r}, \Delta\vec{P}] = J\Delta\vec{\omega}.$$

В проекции на ось OO' полученное уравнение примет вид

$$r\Delta P \sin \alpha = J\Delta\omega.$$

Учтем, что $r \sin \alpha = l$ – плечо силы, а в начальный момент тело покоилось ($\omega_0 = 0$), поэтому $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega$. Следовательно, полученное уравнение можно записать в виде: $l\Delta P = J\omega$.

Скорость шарика до столкновения равна \vec{v} , а после столкновения \vec{u} . Изменение импульса шарика равно $\Delta P = mu - (-mv) = mu + mv$.

$$l(mu + mv) = J\omega \text{ или } mu = \frac{J\omega}{l} - mv.$$

Так как удар шарика о тела является абсолютно упругим, чтобы определить скорость шарика после столкновения, воспользуемся законом сохранения энергии. До столкновения шарик двигался со скоростью \vec{v} , а тело покоилось. После столкновения тело начало вращаться с угловой скоростью ω , а шарик полетел в противоположную сторону со скоростью \vec{u} . Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \text{ или } mu^2 = mv^2 - J\omega^2.$$

Записанное ранее уравнение динамики возведем в квадрат, а выражение, полученное из закона сохранения энергии, домножим на массу шарика.

$$(mu)^2 = \left(\frac{J\omega}{l} - mv\right)^2 \text{ и } (mu)^2 = (mv)^2 - mJ\omega^2.$$

Сравнив эти два выражения, можно записать:

$$\left(\frac{J\omega}{l} - mv\right)^2 = (mv)^2 - mJ\omega^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим уравнение

$$J\omega + m\omega l^2 = 2mvl.$$

Учитывая, что угловая скорость вращения тела ω обратно пропорциональна периоду T : $\omega = \frac{2\pi}{T}$, уравнение можно переписать в виде

$$J\pi + m\pi l^2 = mv\pi T.$$

Тогда момент инерции J тела:

$$J = ml \frac{vT - \pi l}{\pi}.$$

Таким образом, можно экспериментально определить момент инерции тела относительно произвольной оси вращения, перпендикулярной направлению движения шарика, приводящего тело в движение. Для этого достаточно измерить время, за которое равномерно вращающееся тело совершает один оборот – период вращения T .

На основе этого же выражения можно проанализировать, как период вращения тела будет зависеть от массы m и начальной скорости шарика v , плеча силы l (расстояния между осью вращения и линией удара) и момента инерции J тела. Для этого полученное ранее уравнение перепишем в виде

$$T = \frac{J\pi}{mvl} + \frac{\pi l}{v}.$$

Отсюда видно, что чем больше момент инерции (при прочих одинаковых параметрах m , v , l), тем больше период вращения тела. Чем больше масса и начальная скорость шарика, тем меньше период вращения тела (тело совершает один оборот за меньшее время).

Если для измерения периода вращения тела в эксперименте будет использоваться секундомер с определенной точностью, то для уменьшения влияния погрешности прибора на результаты измерений предпочтительными считают условия, при которых измеряемая величина (T) значительно больше погрешности прибора (секундомера). Поэтому обычно в эксперименте рекомендуется измерять время не одного, а не-

скольких оборотов тела. Учитывая полученную зависимость $T(v)$ периода обращения тела от начальной скорости шарика, можно для данного эксперимента, уменьшая начальную скорость шарика, добиться увеличения периода T , а значит и уменьшения относительной погрешности его измерения с помощью секундомера. Например, для экспериментов, в которых момент инерции меньше, рекомендуется и начальную скорость шарика также уменьшать. Это позволит получать экспериментальные данные с примерно равными относительными погрешностями.

2.2. Зависимость момента инерции тела от положения оси вращения

Согласно теореме Штейнера момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен моменту его инерции J_C относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы m_T тела на квадрат расстояния R_C между осями.

$$J = J_C + m_T R_C^2.$$

Если оси параллельны, то для задания расстояния между ними достаточно двух координат в плоскости, перпендикулярной осям. Если в плоскости, перпендикулярной осям, положение точки, через которую проходит ось вращения, задается координатами x_O и y_O , а положение оси, проходящей через центр масс (инерции) – координатами x_C и y_C , тогда квадрат расстояния между этими осями равен

$$R_C^2 = (x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2.$$

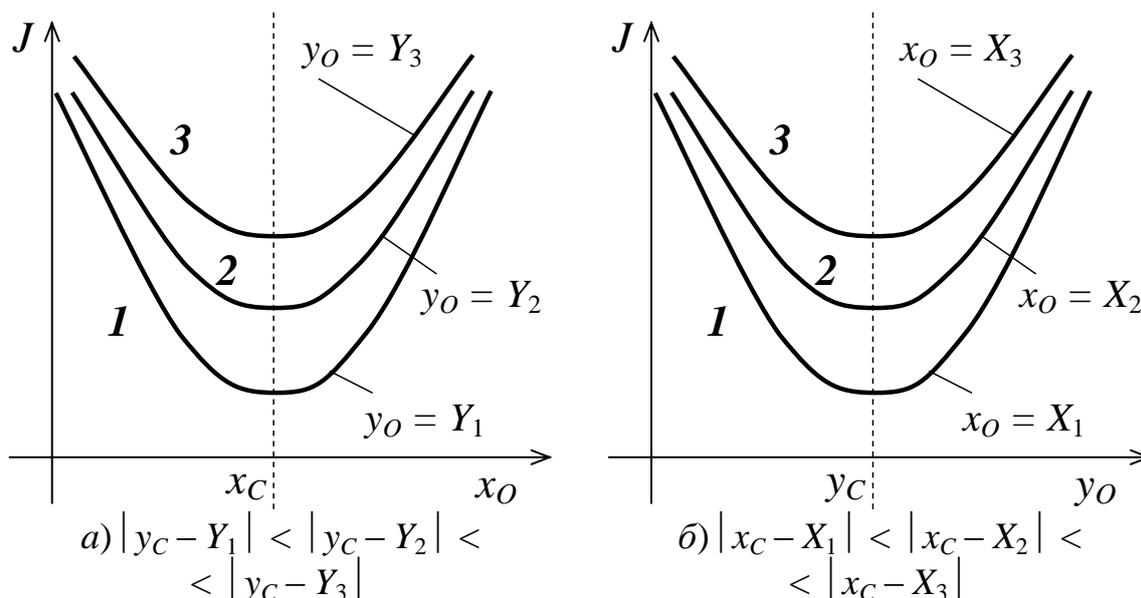


Рис. 10

Тогда момент инерции относительно выбранной оси можно записать в виде:

$$J = J_C + m_T(x_O - x_C)^2 + m_T(y_O - y_C)^2.$$

Из полученного выражения видно, что при приближении X-координаты оси вращения x_O к центру инерции $x_O \rightarrow x_C$ (при неизменном значении y_O) момент инерции тела J уменьшается (рис. 10а) и стремится в величине $J \rightarrow J_C + m_T(y_O - y_C)^2$.

Аналогично, при приближении Y-координаты оси вращения y_O к центру инерции $y_O \rightarrow y_C$ (при неизменном значении x_O) момент инерции тела J уменьшается (рис. 10б) и стремится в величине $J \rightarrow J_C + m_T(x_O - x_C)^2$.

Следовательно, график зависимости $J(x_O)$ будет носить квадратичный характер с минимумом в точке $x_O = x_C$ (при любом фиксированном значении координаты y_O), и график зависимости $J(y_O)$ также будут носить квадратичный характер, но с минимумом в точке $y_O = y_C$ (при любом фиксированном значении координаты x_O). Поэтому изучение зависимостей $J(x_O)$ и $J(y_O)$ можно использовать для экспериментального определения положения центра инерции (координат x_C и y_C).

С другой стороны, если известны (например, из эксперимента) значения J_1 и J_2 момента инерции тела относительно осей, проходящих параллельно оси OZ через точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , то по теореме Штейнера

$$\begin{aligned} J_1 &= J_C + m_T(x_1 - x_C)^2 + m_T(y_1 - y_C)^2, \\ J_2 &= J_C + m_T(x_2 - x_C)^2 + m_T(y_2 - y_C)^2. \end{aligned}$$

Если $y_1 = y_2$, а $x_1 \neq x_2$, то

$$\begin{aligned} J_1 - J_2 &= m_T(x_1 - x_C)^2 - m_T(x_2 - x_C)^2 \text{ или} \\ J_1 - J_2 &= m_T(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_C). \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } x_C = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{J_1 - J_2}{2m_T(x_1 - x_2)}.$$

Аналогично, если $x_1 = x_2$, а $y_1 \neq y_2$, то

$$y_C = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - \frac{J_1 - J_2}{2m_T(y_1 - y_2)}.$$

Таким образом, координаты центра инерции тела можно вычислить, зная значения момента инерции тела относительно двух параллельных осей, положения которых в декартовой системе координат отличаются только одной координатой (например, только X-координатой или только Y-координатой). Если положения осей вращения отличаются только X-координатой, это позволяет вычислить только X-координату центра инерции тела. Для вычисления Y-координаты центра инерции необходимо из эксперимента получить значения момента инерции относительно двух других положений осей вращения, с различными Y-координатами.

Если положение центра инерции тела известно (x_C, y_C) , то для вычисления момента инерции J_C тела относительно оси вращения, проходящей параллельно OZ через центр инерции, достаточно из эксперимента получить значение J момента инерции относительно любой (x_O, y_O) оси, параллельной OZ , а затем воспользоваться теоремой Штейнера:

$$J_C = J - m_T(x_O - x_C)^2 - m_T(y_O - y_C)^2.$$

2.3. Зависимость периода вращения тела от положения оси вращения

Чтобы проанализировать зависимость периода вращения T от положения оси вращения (x_O, y_O) , необходимо заметить, что согласно теореме Штейнера момент инерции тела J изменяется с изменением положения оси вращения: $J = J_C + m_T(x_O - x_C)^2 + m_T(y_O - y_C)^2$.

Тогда выражение, связывающее период вращения тела и его моментом инерции, примет вид:

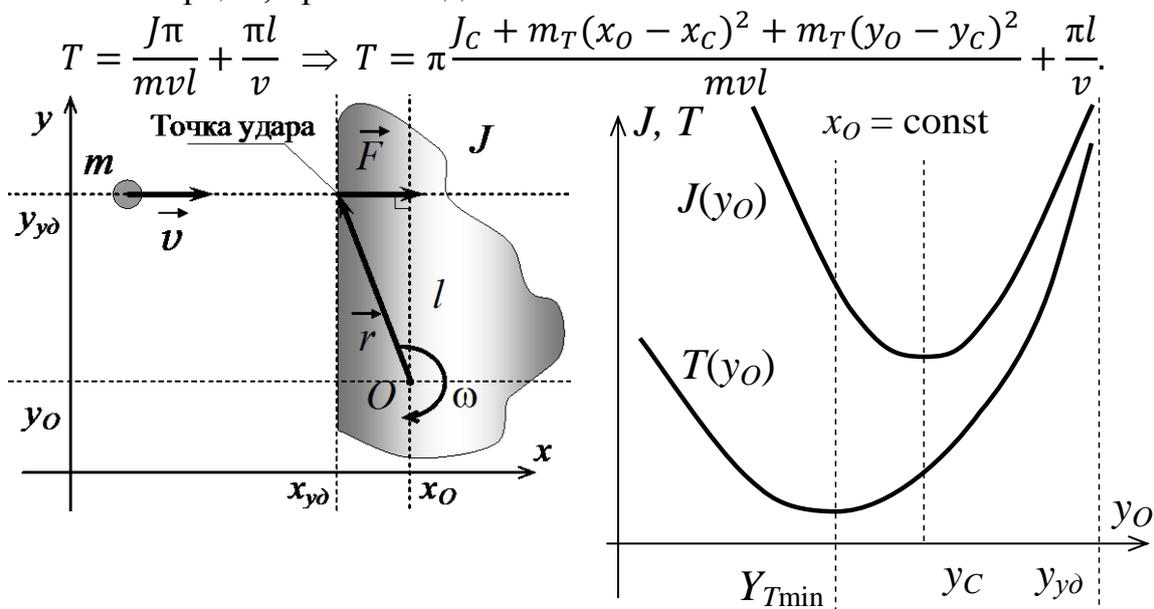


Рис. 11

Рис. 12

Если при любом положении оси вращения точка (с координатами x_{yd}, y_{yd}), в которой шарик ударяется о тело, остается неизменной, а направление движения шарика (направление действия силы) параллельно оси OX , то плечо силы $l = y_{yd} - y_O$ (рис. 11) также изменяется при перемещении оси вращения.

$$T = \pi \frac{J_C + m_T(x_O - x_C)^2 + m_T(y_O - y_C)^2}{mv(y_{yd} - y_O)} + \frac{\pi(y_{yd} - y_O)}{v}.$$

Рассмотрим, как зависит период вращения тела от X -координаты положения оси вращения $T(x_O)$ при неизменном значении Y -координаты ($y_O = \text{const}$). Для этого найдем частную производную

$$\frac{\partial T}{\partial x_0} = 2\pi \frac{m_T(x_0 - x_C)}{mv(y_{y0} - y_0)}$$

Эта производная обращается в ноль при $x_0 = x_C$, когда X-координата оси вращения совпадает с X-координатой центра инерции. То есть зависимость $T(x_0)$ также как и зависимость $J(x_0)$ носит квадратичный характер и имеет минимум в точке $x_0 = x_C$.

Зависимость $T(y_0)$ периода вращения тела от Y-координаты положения оси вращения носит более сложный характер. С одной стороны период увеличивается при удалении от центра инерции, с другой – уменьшается при удалении от линии удара. Поэтому частная производная

$$\frac{\partial T}{\partial y_0} = \pi \frac{J_C + m_T(x_0 - x_C)^2 + m_T(y_0 - y_C)^2 + 2m_T(y_0 - y_C)(y_{y0} - y_0)}{mv(y_{y0} - y_0)^2} - \frac{\pi}{v}$$

обращается в ноль в точке, отличающейся от Y-координаты центра инерции. Зависимость $T(y_0)$ также имеет минимум, но этот минимум расположен дальше от точки удара, чем центр инерции тела (рис. 12). Для тел различной массы и формы сдвиг минимума зависимости $T(y_0)$ по сравнению с минимумом зависимости $J(y_0)$ может быть значительным. Так для тел массой около 5 кг протяженностью около 30 см (максимальный линейный размер) этот сдвиг может достигать 2,5–3,5 см.

Поэтому экспериментальное определение минимума зависимости $T(x_0)$ может служить для достаточно точного нахождения X-координаты центра инерции практически без расчета значений моментов инерции J , а экспериментальное определение минимума зависимости $T(y_0)$ может служить только для грубой (приблизительной) оценки значений Y-координаты центра инерции. Для точного определения Y-координаты центра инерции необходимо вычислить все значения момента инерции и найти положение минимума зависимости $J(y_0)$, но учитывая проведенные ранее исследования, эти расчеты достаточно выполнить только вблизи минимума зависимости $T(y_0)$.

3. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется вращательное движение абсолютно твердого тела, возникающее вследствие упругого взаимодействия с равномерно и прямолинейно летящим шариком. Сила тяжести, направленная перпендикулярно плоскости движения, скомпенсирована другими сторонними силами и не оказывает влияния ни на движение тела, ни на движение шарика. Трение в рассматриваемой системе пренебрежимо мало.

Тело имеет форму прямоугольной призмы. До удара шарик движется перпендикулярно одной из плоских граней призмы. После удара тело вращается равномерно.

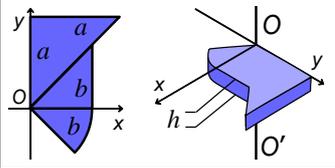
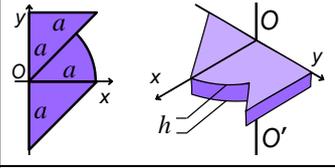
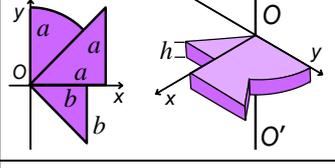
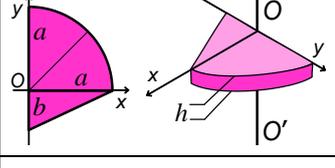
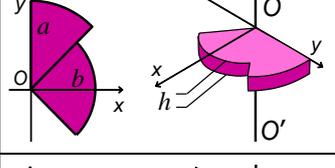
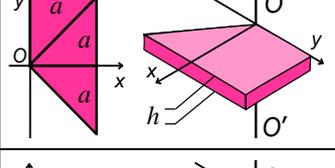
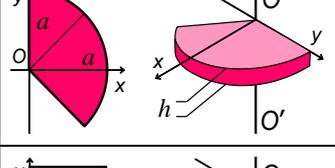
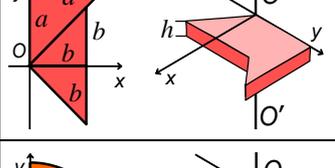
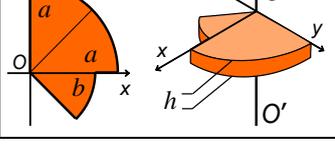
Ось, вокруг которой вращается тело, можно перемещать в двух взаимно перпендикулярных направлениях в пределах, задаваемых линейными размерами тела, с точностью 0,05 см. Начальная скорость шарика может изменяться в диапазоне от 15 до 45 см/с. Для определения времени, за которое тело совершит заданное число оборотов, используется секундомер, способный измерять время с точностью до 0,1 миллисекунды. Секундомер может быть настроен для измерения времени различного количества оборотов тела. При указанных условиях погрешность определения момента инерции тела в эксперименте не превышает 0,5%, а погрешность определения координат центра инерции не превышает 2%.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит панель инструментов с кнопками для выбора тела, счетчик для изменения начальной скорости шарика, ползунки для изменения положения оси вращения по горизонтали и по вертикали, настраиваемый секундомер для измерения времени вращения тела, а также вспомогательные кнопки, позволяющие управлять экспериментом.

Варианты выполнения работы (тело имеет форму прямоугольной призмы)

Вариант	Схема тела	Момент инерции относительно оси, проходящей через начало координат	Координаты центра инерции
1		$\frac{m_T}{6} \frac{32b^4 + 3a^4\pi}{8b^2 + a^2\pi}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{4b^3 - a^3\sqrt{2} + 2a^3}{8b^2 + a^2\pi}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{a^3\sqrt{2}}{8b^2 + a^2\pi}$

Вариант	Схема тела	Момент инерции относительно оси, проходящей через начало координат	Координаты центра инерции
2		$\frac{m_T}{6} \frac{16a^4 + 16b^4 + 3b^4\pi}{4a^2 + 4b^2 + b^2\pi}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{a^3 + 2b^3 + b^3\sqrt{2}}{4a^2 + 4b^2 + b^2\pi}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{2a^3 + b^3(\sqrt{2} - 1)}{4a^2 + 4b^2 + b^2\pi}$
3		$\frac{m_T}{2} a^2$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{a(2 + \sqrt{2})}{8 + \pi}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{a(3 - \sqrt{2})}{8 + \pi}$
4		$\frac{m_T}{6} \frac{16a^4 + 16b^4 + 3a^4\pi}{4a^2 + 4b^2 + a^2\pi}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{4a^3 - a^3\sqrt{2} + 2b^3}{4a^2 + 4b^2 + a^2\pi}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{a^3 - b^3 + a^3\sqrt{2}}{4a^2 + 4b^2 + a^2\pi}$
5		$\frac{m_T}{6} \frac{3\pi a^3 + 2b^3 + 2a^2b}{\pi a + 2b}$	$x_c = \frac{2}{3} \frac{a(2a + b)}{\pi a + 2b}$ $y_c = \frac{2}{3} \frac{2a^2 - b^2}{\pi a + 2b}$
6		$\frac{m_T}{2} \frac{a^4 + 2b^4}{a^2 + 2b^2}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{a^3(2 - \sqrt{2}) + 2b^3\sqrt{2}}{\pi(a^2 + 2b^2)}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{a^3\sqrt{2}}{\pi(a^2 + 2b^2)}$
7		$\frac{2m_T}{3} a^2$	$x_c = \frac{5}{9} a$ $y_c = \frac{2}{9} a$
8		$\frac{m_T}{2} a^2$	$x_c = \frac{4}{9} \frac{a(2 + \sqrt{2})}{\pi}$ $y_c = \frac{4}{9} \frac{a\sqrt{2}}{\pi}$
9		$\frac{2m_T}{3} \frac{a^4 + 2b^4}{a^2 + 2b^2}$	$x_c = \frac{1}{3} \frac{a^3 + 4b^3}{a^2 + 2b^2}$ $y_c = \frac{2}{3} \frac{a^3}{a^2 + 2b^2}$
10		$\frac{m_T}{2} \frac{2a^4 + b^4}{2a^2 + b^2}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{2a^3 + b^3\sqrt{2}}{\pi(2a^2 + b^2)}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{2a^3 - b^3(2 - \sqrt{2})}{\pi(2a^2 + b^2)}$

Вариант	Схема тела	Момент инерции относительно оси, проходящей через начало координат	Координаты центра инерции
11		$\frac{m_T}{3} \frac{2a^4 + 3b^4}{a^2 + 2b^2}$	$x_c = \frac{1}{3} \frac{a^3 + 3b^3}{a^2 + 2b^2}$ $y_c = \frac{2}{3} \frac{a^3}{a^2 + 2b^2}$
12		$\frac{5m_T}{18} (a^2 + b^2)$	$x_c = \frac{1}{9} (a + 3b)$ $y_c = \frac{1}{9} (3a - b)$
13		$\frac{2m_T}{3} \frac{2a^4 + b^4}{2a^2 + b^2}$	$x_c = \frac{1}{3} \frac{3a^3 + 2b^3}{2a^2 + b^2}$ $y_c = \frac{1}{3} \frac{3a^3 - b^3}{2a^2 + b^2}$
14		$\frac{m_T}{2} \frac{a^4 + 3b^4}{a^2 + 3b^2}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{a^3(2 - \sqrt{2}) + b^3(2 + \sqrt{2})}{\pi(a^2 + 3b^2)}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}(a^3 - b^3)}{\pi(a^2 + 3b^2)}$
15		$\frac{m_T}{2} \frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{a^3 + b^3}{\pi(a^2 + b^2)}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{a^3 - b^3}{\pi(a^2 + b^2)}$
16		$\frac{m_T}{6} a^2 \frac{8 + 3\pi}{2 + \pi}$	$x_c = \frac{8}{3} \frac{a}{2 + \pi}$ $y_c = \frac{2}{3} \frac{a(2\sqrt{2} - 1)}{2 + \pi}$
17		$\frac{m_T}{6} a^2 \frac{8 + 3\pi}{2 + \pi}$	$x_c = \frac{2}{3} \frac{a(1 + 2\sqrt{2})}{2 + \pi}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{a}{2 + \pi}$
18		$\frac{m_T}{6} a^2 \frac{32 + 3\pi}{8 + \pi}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{a(3 + \sqrt{2})}{8 + \pi}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{a(1 + \sqrt{2})}{8 + \pi}$
19		$\frac{m_T}{6} \frac{8a^3 + b^3 + a^2b}{2a + b}$	$x_c = \frac{1}{3} \frac{a(3a + b)}{2a + b}$ $y_c = \frac{1}{3} \frac{3a^2 - b^2}{2a + b}$

Вариант	Схема тела	Момент инерции относительно оси, проходящей через начало координат	Координаты центра инерции
20		$\frac{m_T}{18} (7a^2 + 5b^2)$	$x_c = \frac{1}{9} (2a + 3b)$ $y_c = \frac{1}{9} (3a - b)$
21		$\frac{m_T}{6} \frac{16a^4 + 32b^4 + 3a^4\pi}{4a^2 + 8b^2 + a^2\pi}$	$x_c = \frac{4}{3} \frac{4a^3 - a^3\sqrt{2} + 3b^3}{4a^2 + 8b^2 + a^2\pi}$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{a^3 - 3b^3 + a^3\sqrt{2}}{4a^2 + 8b^2 + a^2\pi}$

4. Порядок выполнения работы

4.1. Краткое описание хода работы

1. Выберите тело (по указанию преподавателя).
2. Выдвиньте предположение, где расположен центр инерции данного тела.
3. Определите количество оборотов, которое будет фиксироваться секундомером.

Определение X-координаты центра инерции

4. Установите значение Y-координаты оси вращения БОЛЬШЕ Y-координаты центра инерции на $a/3$.
5. Установите значение начальной скорости шарика равное 45 см/с.
6. Установите минимальное значение X-координаты оси вращения. Выполните эксперимент и измерьте время вращения тела.
7. Увеличивая значение X-координаты, повторите эксперимент и измерьте время вращения тела 7–10 раз.
8. Установите значение Y-координаты оси вращения МЕНЬШЕ Y-координаты центра инерции на $a/4$.
9. Установите значение начальной скорости шарика равное 40 см/с.
10. Повторите эксперимент и измерьте время вращения тела 7–10 раз для тех же значений X-координаты оси вращения, как при выполнении пунктов 6–7.
11. Установите значение Y-координаты оси вращения РАВНОЕ Y-координате центра инерции.

12. Установите значение начальной скорости шарика равное 35 см/с.

13. Повторите эксперимент и измерьте время вращения тела 7–10 раз для тех же значений X-координаты оси вращения, как при выполнении пунктов 6–7.

14. Определите X-координату оси вращения, которой соответствует минимальное время вращения тела.

15. Уточните X-координату оси вращения, которой соответствует минимальное время вращения тела.

16. Определите X-координату центра инерции тела двумя способами.

Определение Y-координаты центра инерции

17. Установите значение X-координаты оси вращения МЕНЬШЕ X-координаты центра инерции на $a/3$.

18. Установите значение начальной скорости шарика равное 45 см/с.

19. Установите минимальное значение Y-координаты оси вращения. Выполните эксперимент и измерьте время вращения тела.

20. Увеличивая значение Y-координаты, повторите эксперимент и измерьте время вращения тела 13 раз.

21. Установите значение X-координаты оси вращения БОЛЬШЕ X-координаты центра инерции на $a/4$.

22. Установите значение начальной скорости шарика равное 40 см/с.

23. Повторите эксперимент и измерьте время вращения тела 13 раз для тех же значений Y-координаты оси вращения, как при выполнении пунктов 19–20.

24. Установите значение X-координаты оси вращения РАВНОЕ X-координате центра инерции.

25. Установите значение начальной скорости шарика равное 35 см/с.

26. Повторите эксперимент и измерьте время вращения тела 13 раз для тех же значений Y-координаты оси вращения, как при выполнении пунктов 19–20.

27. Определите Y-координату оси вращения, которой соответствует минимальное время вращения тела.

28. Уточните Y-координату оси вращения, которой соответствует минимальное время вращения тела.

29. Определите Y-координату центра инерции тела двумя способами.

30. Определите значение момента инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр инерции (двумя способами).

31. Вычислите теоретические значения координат центра инерции и момента инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр инерции.

32. Сравните теоретические значения со значениями, полученными из эксперимента. Сделайте выводы.

4.2. Подробное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Панель инструментов **«Тело»** содержит раскрывающуюся панель кнопок **«Сечение»**, позволяющую выбрать поперечное сечение прямоугольной призмы, которая будет участвовать в эксперименте. Выберите сечение тела, с которым будет происходить эксперимент (по указанию преподавателя). Для выбранного тела рядом с панелью кнопок автоматически указываются его масса, линейные размеры, а также чертеж (схема), необходимые для расчета теоретических значений положения центра инерции и момента инерции тела.

2. Рассмотрите тело, расположенное в области эксперимента, и интуитивно выдвиньте предположение, где находится центр инерции данного тела.

Ползунок **«X»**, расположенный ниже области эксперимента, позволяет изменять X-координату оси вращения (X_0). А ползунок **«Y»**, расположенный справа от области эксперимента, позволяет изменять Y-координату оси вращения (Y_0). Перемещая каждый из этих ползунков, поместите ось вращения тела так, чтобы она проходила через предполагаемый центр инерции. При перемещении ползунков **«X»** и **«Y»** точное значение координат оси вращения автоматически отображается ниже области эксперимента с точностью до 0,05 см. Округлите полученные координаты оси вращения до целых (с точностью до 1 см) и запишите. Точку с этими координатами далее будем считать предполагаемым положением центра инерции.

Перемещая ползунки **«X»** и **«Y»**, поместите ось вращения тела так, чтобы она проходила через предполагаемый центр инерции.

3. Определите количество оборотов, которое будет фиксироваться секундомером.

Для этого с помощью счетчика **«Начальная скорость»**, расположенного на панели инструментов **«Шарик»**, задайте максимальное из доступных в работе значение скорости шарика (45 см/с).

На панели **«Секундомер»** расположен счетчик **«Количество оборотов»**, позволяющий изменять количество оборотов, на измерение времени которых настроен секундомер. Установите счетчик так, чтобы секундомер измерял время одного оборота тела.

Определите время одного оборота тела относительно оси, проходящей через предполагаемый центр инерции. Для этого, не изменяя положения оси вращения, нажмите кнопку **«Начать эксперимент»** – в заданных условиях начнет двигаться шарик. После упругого удара о тело шарик полетит в противоположную сторону, а тело начнет вращаться с постоянной угловой скоростью – автоматически включится

секундомер. Эксперимент закончится, когда тело выполнит заданное количество оборотов – тело и секундомер автоматически остановятся.

Зная время одного оборота, определите, сколько оборотов N должно совершить тело, чтобы вращаться не менее 12 с. Для этого 12 с разделите на время одного оборота, а полученное число округлите до целого в большую сторону.

С помощью счетчика на панели инструментов «**Секундомер**» настройте секундомер на измерение времени полученного количества оборотов N . Во всех последующих экспериментах не изменяйте количество оборотов, длительность которых будет фиксировать секундомер.

Определение X-координаты центра инерции

Для определения X-координаты центра инерции рекомендуется получить три зависимости $T(X_0)$ периода вращения тела от X-координаты оси вращения и соответствующие им зависимости $J(X_0)$ момента инерции тела от X-координаты оси вращения. При получении каждой из этих зависимостей Y-координата оси вращения должна быть фиксированной.

4. Используя значение Y-координаты предполагаемого центра инерции (см. пункт 2), рассчитайте Y-координату оси вращения для получения первой зависимости $T(X_0)$. Для этого к значению Y-координаты предполагаемого центра инерции прибавьте $a/3$, полученное значение округлите до целого. Перемещая ползунок «Y», измените положение оси вращения так, что Y-координата оси вращения тела была равна вычисленному значению. Не изменяйте значение Y-координаты оси вращения тела при выполнении пунктов 5–7.

5. Счетчик «**Начальная скорость**» на панели инструментов «**Шарик**» позволяет изменять начальную скорость шарика от 15 до 45 см/с. С помощью этого счетчика установите значение начальной скорости шарика равное 45 см/с.

6. Перемещая ползунок «X», расположенный ниже области эксперимента, измените положение оси вращения так, что X-координата оси вращения тела была равна нулю.

Выполните эксперимент. Для этого нажмите кнопку «**Начать эксперимент**» и дождитесь, когда после удара шарика тело совершит заданное количество оборотов. Во время эксперимента все ползунки, счетчики и кнопки на панели инструментов становятся недоступными. Эксперимент завершится автоматически; все ползунки, счетчики и кнопки на панели инструментов вновь становятся доступными.

Если в процессе эксперимента Вы вспомнили, что неправильно задали какие-то параметры (например, начальную скорость шарика, положение оси вращения и т.д.), то эксперимент можно досрочно прервать с помощью кнопки «**Остановить эксперимент**». После этого можно сделать необходимые изменения и вновь выполнить эксперимент.

По окончании эксперимента **ВРЕМЯ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 3.**

7. Значение X-координаты оси вращения можно изменять в некоторых пределах: от нуля до максимального значения, которое зависит от формы сечения прямоугольной призмы. Повторите эксперимент 7–10 раз (в зависимости от формы выбранного тела), изменяя X-координату оси вращения от нуля до максимального значения через каждые 2 см.

ВРЕМЯ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА, соответствующее каждому значению X-координаты оси вращения, ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 3.

8. Используя значение Y -координаты предполагаемого центра инерции (см. пункт 2), рассчитайте Y -координату оси вращения для получения второй зависимости $T(X_0)$. Для этого от значения Y -координаты предполагаемого центра инерции отнимите $a/4$, полученное значение округлите до целого. Перемещая ползунок « Y », измените положение оси вращения так, что Y -координата оси вращения тела была равна вычисленному значению. Не изменяйте значение Y -координаты оси вращения тела при выполнении пунктов 9–10.

9. Так как Y -координата оси вращения, рассчитанная в пункте 8, ближе к Y -координате предполагаемого положения центра инерции, чем Y -координата оси вращения, использованная ранее при получении первой зависимости $T(X_0)$, для получения второй зависимости $T(X_0)$ выберите начальную скорость шарика меньше, чем в пункте 5, на 5 см/с. Это предотвратит увеличение относительной погрешности измерения времени при получении второй зависимости $T(X_0)$. С помощью счетчика «Начальная скорость» на панели инструментов «Шарик» установите значение начальной скорости равное 40 см/с.

10. Не изменяя начальную скорость шарика и Y -координату оси вращения, выполните эксперимент 7–10 раз для тех же значений X -координаты оси вращения, как при выполнении пунктов 6–7.

ВРЕМЯ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА, соответствующее каждому значению X -координаты оси вращения, ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 3.

11. Для получения третьей зависимости $T(X_0)$ с помощью ползунка « Y » установите значение Y -координаты оси вращения РАВНОЕ Y -координате предполагаемого центра инерции.

12. Для предотвращения увеличения относительной погрешности измерения времени при получении третьей зависимости $T(X_0)$ начальную скорость шарика необходимо вновь уменьшить и установить равной 35 см/с.

13. Не изменяя начальную скорость шарика и Y -координату оси вращения, выполните эксперимент 7–10 раз для тех же значений X -координаты оси вращения, как при выполнении пунктов 6–7.

ВРЕМЯ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА, соответствующее каждому значению X -координаты оси вращения, ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 3.

14. Проанализируйте полученные данные. Помните, что время вращения тела и период вращения во всех проведенных опытах отличаются в одинаковое количество раз. Поэтому *анализируя время вращения*, здесь и далее *можно иметь в виду период*. Для каждой зависимости $T(X_0)$ по таблице определите X -координату оси вращения, которой соответствует минимальное время вращения тела. Найденное значение обозначьте X_{Tmin} .

Все ли зависимости $T(X_0)$ имеют минимум при одном и том же значении X -координаты оси вращения?

15. Уточните X -координату оси вращения, которой соответствует минимальное время вращения тела. Для этого переместите ось вращения тела в положение с координатой $X_0 = X_{Tmin}$, значение которой найдено при выполнении пункта 14. Выполните эксперимент, задав начальную скорость шарика равной 30 см/с, а Y -координату оси вращения равной Y -координате предполагаемого центра инерции.

Выполните по 10 экспериментов в каждую (большую и меньшую) сторону от найденного при выполнении пункта 14 значения X_{Tmin} , изменяя X -координату оси вращения каждый раз на 0,15 см. (Начальная скорость шарика и Y -координата оси вращения должны оставаться неизменными.)

ВРЕМЯ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА, соответствующее каждому значению X -координаты оси вращения, **ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 3.**

16. По данным, полученным во всех проведенных экспериментах, вычислите плечо силы, период вращения и момент инерции тела. Учитывая точность измерений, период вращения (время, за которое тело совершает один оборот) необходимо вычислять с точностью до четырех, а момент инерции – до двух десятичных знаков после запятой.

Постройте график зависимости $J(X_0)$ момента инерции тела от X -координаты оси вращения: три кривые на одном графике – по данным, полученным при выполнении пунктов 6–7 (1 кривая), пункта 10 (2 кривая) и пункта 13 (3 кривая).

Определите X -координату центра инерции тела **двумя способами**:

1) из таблицы – так как зависимости $T(X_0)$ и $J(X_0)$ имеют минимум при одном и том же значении X -координаты оси вращения, то для определения X -координаты центра инерции достаточно выяснить при каком значении X -координаты оси вращения *время вращения тела* (период) *было минимальным*. Выполните этот анализ по данным, полученным при выполнении пункта 15.

2) из расчетов – из данных, полученных при выполнении пункта 15, выберите два эксперимента, в которых положения оси вращения максимально удалены друг от друга и от центра инерции, например, эксперименты для X -координат оси вращения X_{-10} и X_{10} , удаленные на 1,5 см от X_{Tmin} в разные стороны (Y -координаты этих положений оси вращения одинаковы). Им соответствуют значения J_{-10} и J_{10} момента инерции тела. Тогда согласно теореме Штейнера для расчета X -координаты центра инерции можно использовать формулу:

$$X_C = \frac{1}{2}(X_{-10} + X_{10}) - \frac{J_{-10} - J_{10}}{2m_T(X_{-10} - X_{10})}.$$

Так как в эксперименте положение оси вращения можно изменять с точностью 0,05 см, вычисления X -координаты оси вращения необходимо выполнять с точностью до трех десятичных знаков после запятой.

Определение Y -координаты центра инерции

Для определения Y -координаты центра инерции рекомендуется получить три зависимости $T(Y_0)$ периода вращения тела от Y -координаты оси вращения и соответствующие им зависимости $J(Y_0)$ момента инерции тела от Y -координаты оси вращения. При получении каждой из этих зависимостей X -координата оси вращения должна быть фиксированной.

17. Используя значение X -координаты центра инерции, найденного при выполнении пункта 16, рассчитайте X -координату оси вращения для получения первой зависимости $T(Y_0)$. Для этого от значения X -координаты центра инерции, найденного в пункте 16 (способ 1), отнимите $a/3$, полученное значение округлите до целого. Перемещая ползунок « X », измените положение оси вращения так, что X -координата оси вращения тела была равна вычисленному значению (или нулю, если вычисленное значение отрицательно). Не изменяйте значение X -координаты оси вращения тела при выполнении пунктов 18–20.

18. Установите значение начальной скорости шарика равное 45 см/с (см. пункт 5).

19. Значение Y -координаты оси вращения можно изменять в некоторых пределах: от минимального до максимального значения, которые зависят от формы сечения прямоугольной призмы. Перемещая ползунок « Y », расположенный справа от

области эксперимента, измените положение оси вращения так, что Y -координата оси вращения тела принимала минимальное (из доступных в работе) значение. Обратите внимание, что при этом для некоторых тел точка, через которую проходит ось вращения, может оказаться ВНЕ тела. Выполните эксперимент.

ВРЕМЯ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 3.

20. Повторите эксперимент 13 раз, изменяя Y -координату оси вращения от минимального до максимального значения через каждые 2 см.

ВРЕМЯ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА, соответствующее каждому значению Y -координаты оси вращения, ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 3.

21. Используя значение X -координаты центра инерции, найденного при выполнении пункта 16 (способ 1), рассчитайте X -координату оси вращения для получения второй зависимости $T(Y_0)$. Для этого к значению X -координаты центра инерции прибавьте $a/4$, полученное значение округлите до целого. Перемещая ползунок «X», измените положение оси вращения так, что X -координата оси вращения тела была равна вычисленному значению. Не изменяйте значение X -координаты оси вращения тела при выполнении пунктов 22–23.

22. Для предотвращения увеличения относительной погрешности измерения времени при получении второй зависимости $T(Y_0)$ начальную скорость шарика необходимо уменьшить и установить равной 40 см/с.

23. Не изменяя начальную скорость шарика и X -координату оси вращения, повторите эксперимент 13 раз для тех же значений Y -координаты оси вращения, как при выполнении пунктов 19–20.

ВРЕМЯ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА, соответствующее каждому значению Y -координаты оси вращения, ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 3.

24. Для получения третьей зависимости $T(Y_0)$ с помощью ползунка «X» установите значение X -координаты оси вращения РАВНОЕ X -координате центра инерции, найденного при выполнении пункта 16 (способ 1).

25. Для предотвращения увеличения относительной погрешности измерения времени при получении третьей зависимости $T(Y_0)$ начальную скорость шарика необходимо вновь уменьшить и установить равной 35 см/с.

26. Не изменяя начальную скорость шарика и X -координату оси вращения, повторите эксперимент 13 раз для тех же значений Y -координаты оси вращения, как при выполнении пунктов 19–20.

ВРЕМЯ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА, соответствующее каждому значению Y -координаты оси вращения, ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 3.

27. Проанализируйте полученные данные. Для каждой зависимости $T(Y_0)$ по таблице определите Y -координату оси вращения, которой соответствует минимальное время вращения тела. Обратите внимание, что положение минимумов для зависимости $T(Y_0)$, соответствующих разным значениям X -координаты оси вращения могут отличаться. Чем меньше $|X_0 - X_C|$ разница между X -координатами оси вращения и центра инерции, тем меньше расстояние между минимумами соответствующих зависимостей $T(Y_0)$ и $J(Y_0)$. Поэтому для дальнейших исследований используйте Y -координату оси вращения, которой соответствует минимальное время вращения тела для данных, полученных при выполнении пункта 26 (X -координата оси вращения совпадает с X -координатой центра инерции). Найденное значение обозначьте Y_{Tmin} .

28. Уточните Y -координату оси вращения, которой соответствует минимальное время вращения тела. Для этого переместите ось вращения тела в положение,

которому соответствует Y -координата, значение которой найдено при выполнении пункта 27. Выполните эксперимент, задав начальную скорость шарика равной 30 см/с, а X -координату оси вращения равной X -координате центра инерции.

Так как минимум зависимости $J(Y_O)$ сдвинут относительно минимума зависимости $T(Y_O)$ в сторону линии удара, для более точного определения минимумов обеих зависимостей необходимо выполнить 25 экспериментов, сдвинув ось вращения в сторону линии удара от найденного при выполнении пункта 27 значения Y_{Tmin} (т.е. так, чтобы $Y_O > Y_{Tmin}$), и 10 экспериментов, сдвинув ось вращения в противоположную сторону (т.е. так, чтобы $Y_O < Y_{Tmin}$), изменяя Y -координату оси вращения при этом каждый раз на 0,15 см. (Начальная скорость шарика и X -координата оси вращения должны оставаться неизменными.)

ВРЕМЯ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА, соответствующее каждому значению Y -координаты оси вращения, **ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 3.**

29. По данным, полученным во всех проведенных экспериментах, вычислите плечо силы, период вращения и момент инерции тела. Учитывая точность измерений, период вращения (время, за которое тело совершает один оборот) необходимо вычислять с точностью до четырех, а момент инерции – до двух десятичных знаков после запятой.

Постройте график зависимости $J(Y_O)$ момента инерции тела от Y -координаты оси вращения: три кривые на одном графике – по данным, полученным при выполнении пунктов 19–20 (1 кривая), пункта 23 (2 кривая) и пункта 26 (3 кривая).

Определите Y -координату центра инерции тела двумя способами:

1) из таблицы – так как зависимости $T(Y_O)$ и $J(Y_O)$ имеют минимум при разных значениях Y -координаты оси вращения, то для определения Y -координаты центра инерции необходимо выяснить при каком значении Y -координаты оси вращения *момент инерции тела минимален*. Выполните этот анализ по данным, полученным при выполнении пункта 28.

2) из расчетов – из данных, полученных при выполнении пункта 28, выберите два эксперимента, в которых положения оси вращения максимально удалены друг от друга и от центра инерции, например, эксперименты для Y -координат оси вращения Y_{-10} и Y_{25} , удаленных от Y_{Tmin} в разные стороны (X -координаты этих положений оси вращения одинаковы). Им соответствуют значения J_{-10} и J_{25} момента инерции тела. Тогда согласно теореме Штейнера для расчета Y -координаты центра инерции можно использовать формулу:

$$Y_C = \frac{1}{2}(Y_{-10} + Y_{25}) - \frac{J_{-10} - J_{25}}{2m_T(Y_{-10} - Y_{25})}.$$

Так как в эксперименте положение оси вращения можно изменять с точностью 0,05 см, вычисления Y -координаты центра инерции необходимо выполнять с точностью до трех десятичных знаков после запятой.

30. Определите значение момента инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр инерции (двумя способами):

1) из таблиц – согласно теореме Штейнера при вращении относительно оси, проходящей через центр инерции, тело обладает минимальным моментом инерции. Поэтому минимальное значение момента инерции из всех, которые были зафиксированы во всех экспериментах, можно считать моментом инерции J_C тела относительно оси, проходящей через его центр инерции. Выберите наименьшее значение

момента инерции из всех таблиц. При каком положении оси вращения оно наблюдалось?

2) из теоремы Штейнера – из всех проведенных в работе экспериментов выберите один, в котором ни одна из координат оси вращения не совпадала бы с координатами центра инерции тела. Зная момент инерции J тела относительно этой оси и координаты центра инерции, рассчитанные в пунктах 16 и 29 (способ 2), вычислите значение момента инерции J_C тела относительно оси вращения, проходящей через центр инерции:

$$J_C = J - m_T(X_O - X_C)^2 - m_T(Y_O - Y_C)^2.$$

Учитывая погрешность измерения времени и координат, момент инерции необходимо вычислять с точностью до пяти значащих цифр (два десятичных знака после запятой).

31. Рассчитайте теоретические значения координат центра инерции и момента инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр инерции.

Для этого для тела, участвовавшего в эксперименте, вычислите $x_C = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy}$ и $y_C = \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy}$, а также $J = m_T \frac{\iint (x^2 + y^2) dx dy}{\iint dx dy}$ – момент инерции относительно оси, проходящей через начало координат (оси OZ). Для вычисления некоторых из входящих в эти выражения интегралов можно воспользоваться таблицами 1 и 2.

Для вычисления теоретического значения момента инерции относительно оси, проходящей через центр инерции, воспользуйтесь теоремой Штейнера: $J_C = J - m_T(x_C^2 + y_C^2)$ (где $x_O = 0$, $y_O = 0$ – положение оси вращения, проходящей через начало координат; x_C , y_C – координаты центра инерции, рассчитанные теоретически).

По полученным аналитическим формулам вычислите теоретические значения J_C , x_C , y_C с той же точностью, с которой соответствующие величины были получены в эксперименте.

32. Сравните теоретические значения со значениями, полученными из эксперимента. Сделайте выводы:

В плоскости XOY нарисуйте сечение прямоугольной призмы, которая использовалась в эксперименте. Используя экспериментальные результаты, на этом рисунке отметьте положение центра инерции тела.

Является ли вращательное движение абсолютно твердого тела, наблюдаемое в эксперименте, равномерным? Почему?

Как зависит период вращения тела от начальной скорости шарика, приводящего тело в движение?

Как зависит период вращения тела от положения оси вращения?

Как зависит момент инерции тела от положения оси вращения?

Сравните теоретические и экспериментальные значения координат центра инерции. На сколько процентов экспериментальные значения, полученные двумя способами, отличаются от теоретических?

Сравните теоретическое и экспериментальное значения момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции. На сколько процентов экспериментальные значения, полученные двумя способами, отличаются от теоретического?

Насколько предположение о расположении центра инерции использованного в эксперименте тела, высказанное перед выполнением работы, совпадает с полученными в эксперименте значениями координат центра инерции?

5. Контрольные вопросы

1. Перечислите кинематические характеристики вращательного движения абсолютно твердого тела.
2. Какое вращательное движение принято называть равномерным?
3. Как теоретически можно рассчитать момент инерции и положение центра инерции абсолютно твердого тела с постоянной плотностью?
4. Сформулируйте основное уравнение динамики абсолютно твердого тела.
5. Опишите принципиальную схему эксперимента и запишите уравнение динамики для нее.
6. Получите связь между моментом инерции и периодом вращения тела в предстоящем эксперименте.
7. Как в предстоящем эксперименте период равномерного вращения тела зависит от положения оси вращения?
8. Опишите порядок выполнения работы.

Таблица 3

Х- координата оси враще- ния X_O , см	У- координата оси враще- ния X_O , см	Плечо силы $l = Y_{y0} - Y_O$, см	Время вра- щения t , с	Период вращения T , с	Момент инерции тела J , кг·см ²

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебно-методическое пособие по изучению моделей
физических процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодМ–04
для студентов всех специальностей

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати _____.2022. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».

Печать RISO. Усл.печ.л. _____. Уч.-изд.л. _____.

Заказ _____ . Тираж 50 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества

Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru