МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Отделение естественных наук ШБИП

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
___________ Д.В. Чайковский
«__»_________ 2022 г.

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодК–07
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53. 076

Ревинская О.Г.
Связанные колебания: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодК–07 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 18 с.

УДК 53.076

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП
«___» _________ 20___ г.

Зав. ОЕН ШБИП
проф., доктор физ.-мат. наук В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии
А.В. Макиенко

Рецензент
доктор тех. наук, профессор Томского политехнического университета
В.А. Москалев

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодК–07 ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Связанные колебания

Цель работы: изучение свободных колебаний системы с двумя степенями свободы. Анализ зависимости характеристик движения от начального положения связанных маятников и жесткости соединительной пружины.

1. Теоретическое содержание

1.1. Связанные колебания

Для описания колебательного движения одного тела, например, груза, подвешенного на нити, или тела, прикрепленного к пружине, достаточно знать закон изменения одной физической величины (угла отклонения, смещения относительно положения равновесия). Если для полного описания движения какой-либо системы достаточно знать закон изменения одной физической величины, говорят, что система имеет ***одну степень свободу***. Тогда все остальные характеристики движения однозначно выражаются через выбранную физическую величину.

Если для полного описания движения какой-либо системы необходимо знать законы изменения двух физической величин, а все остальные характеристики движения однозначно выражаются через выбранные величины, говорят, что система имеет ***две степени свободы***. Примером системы, имеющей две степени свободы, может служить система, состоящая из двух маятников (математических или пружинных), соединенных упругой невесомой пружиной. В отсутствии соединительной пружины оба тела совершают свободные гармонические колебания независимо друг от друга. Если маятники соединены между собой, то изменение положения одного маятника будет зависеть не только от характеристик самого маятника, но и от положения другого маятника. Движение обоих тел будет носить повторяющийся характер и называется ***связанными колебаниями***.

Изучим связанные колебания на примере двух пружинных маятников, соединенных упругой невесомой пружиной (рис. 1). Первый маятник состоит из тела массой m_1 и пружины жесткостью k_1, второй маятник состоит из тела массой m_1 и пружины жесткостью k_2, соединительная пружина имеет жесткость k_0. Положение каждого тела удобно описывать отклонением от его положения равновесия: $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ соответственно. На первое тело действует сила упругости $\vec{F}_1 = -k_1\vec{x}_1$ со стороны пружины k_1 и сила упругости $\vec{F}_0 = -k_0(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$ со стороны пружины k_0. На второе тело действует сила упругости $\vec{F}_2 = -k_2\vec{x}_2$ со стороны пружины k_2 и сила упругости $\vec{F}_0 = -k_0(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$ со стороны пружины k_0. Тогда, согласно второму закону Ньютона, положение тел описывается следующей системой уравнений в векторном и скалярном виде:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = -\vec{F}_1 + \vec{F}_0; \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = -\vec{F}_2 - \vec{F}_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = k_1x_1 - k_0(x_2 - x_1); \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = k_2x_2 + k_0(x_2 - x_1). \end{cases}$$

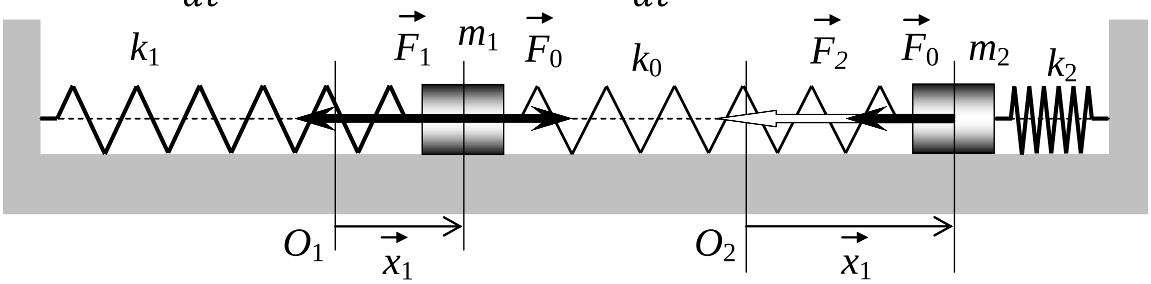

Рис. 1

Данная система уравнений существенно упрощается, если рассматривать одинаковые маятники: $m_1 = m_2 \equiv m$ и $k_1 = k_2 \equiv k$. Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} m \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = kx_1 - k_0(x_2 - x_1); \\ m \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = kx_2 + k_0(x_2 - x_1). \end{cases}$$

Чтобы разделить переменные найдем сумму и разность этих уравнений

$$m\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2}\right) = k(x_1 + x_2),$$

$$m\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{d^2x_2}{dt^2}\right) = k(x_1 - x_2) - 2k_0(x_2 - x_1).$$

В результате получили два независимых уравнения для суммы координат $(x_1 + x_2)$ и разности координат $(x_1 - x_2)$:

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = \frac{k}{m}(x_1 + x_2),$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = \frac{k + 2k_0}{m}(x_1 - x_2).$$

Оба эти уравнения являются уравнениями гармонических колебаний с частотами $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_0}{m}}$, соответственно. Следовательно, сумма $(x_1 + x_2)$ и разность координат $(x_1 - x_2)$ изменяются по гармоническому закону:

$$x_1 + x_2 = 2A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$
$$x_1 - x_2 = 2A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Значения констант A_1, A_2, φ_1, φ_2 зависят от начальных условий. Множитель «2» введен для удобства дальнейших преобразований.

Складывая и вычитая полученные выражения, найдем зависимость от времени координат первого и второго тел x_1 и x_2

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$
$$x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Таким образом, связанные колебания описываются суммой и разностью двух гармонических колебаний с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}}.$$

Зависимость скоростей тел от времени легко получить путем дифференцирования координат x_1 и x_2:

$$v_1 = -A_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$
$$v_2 = -A_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Если в начальный момент времени ($t = 0$) первое тело имело координату $x_1(0)$ и скорость $v_1(0)$, а второе тело – координату $x_2(0)$ и скорость $v_2(0)$, тогда из уравнений

$$x_1(0) + x_2(0) = 2A_1 \cos\varphi_1,$$
$$x_1(0) - x_2(0) = 2A_2 \cos\varphi_2,$$
$$v_1(0) + v_2(0) = -2A_1\omega_1 \sin\varphi_1,$$
$$v_1(0) - v_2(0) = -2A_2\omega_2 \sin\varphi_2$$

можно получить константы A_1, A_2, φ_1, φ_2 в следующем виде:

$$A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(x_1(0) + x_2(0))^2 + \frac{1}{\omega_1^2}(v_1(0) + v_2(0))^2},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(x_1(0) - x_2(0))^2 + \frac{1}{\omega_2^2}(v_1(0) - v_2(0))^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{1}{\omega_1}\frac{v_1(0) + v_2(0)}{x_1(0) + x_2(0)}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\omega_2}\frac{v_1(0) - v_2(0)}{x_1(0) - x_2(0)}.$$

В случае, когда в начальный момент времени скорости обоих тел равны нулю $v_1(0) = 0$ и $v_2(0) = 0$ (тела вывели из положения равновесия и отпустили без начальной скорости), начальные фазы φ_1, φ_2 обоих колебаний равны нулю $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, а амплитуды зависят от начального положения тел:

$$A_1 = \frac{1}{2}(x_1(0) + x_2(0)) \text{ и } A_2 = \frac{1}{2}(x_1(0) - x_2(0)).$$

Тогда зависимость от времени координат первого и второго тел x_1 и x_2

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t,$$
$$x_2 = A_1 \cos \omega_1 t - A_2 \cos \omega_2 t.$$

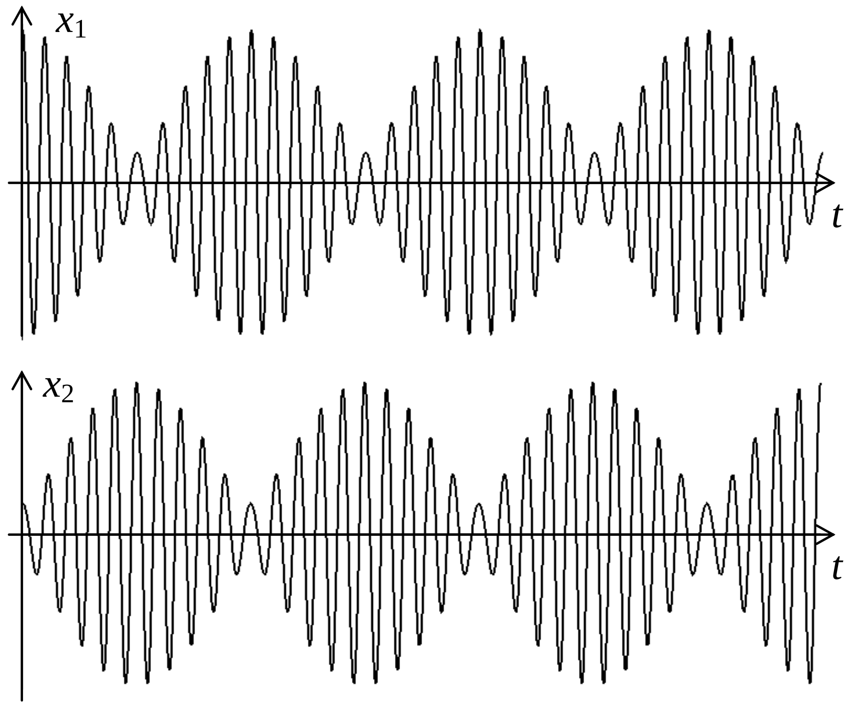

Рис. 2

Таким образом, движение первого тела представляет собой ***сумму колебаний*** с частотами ω_1, ω_2 и амплитудами A_1, A_2, соответственно, разность фаз которых равна нулю. Движение второго тела представляет собой ***разность*** тех же ***колебаний***. На рисунке 2 представлены графики движения первого и второго тел для случая, когда амплитуды A_1 и A_2 различны и отличны от нуля.

С физической точки зрения первый и второй маятники не различимы – они состоят из тел одинаковой массы и одинаковой жесткости. Следовательно, их нумерация условна. Физическая картина не изменится, если тела пронумеровать наоборот. Тогда уравнения, описывающие движения тела, должны быть идентичны с точностью до констант, задаваемых относительным начальным отклонением.

Действительно, зависимость от времени координаты второго тела, представляющей собой разность колебаний, согласно тригонометрическим тождествам можно представить как сумму тех же колебаний, но имеющих начальную разность фаз

$$x_2 = A_1 \cos \omega_1 t - A_2 \cos \omega_2 t = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos(\omega_2 t + \pi).$$

Из математического анализа также известно, что при сложении двух гармонических функций амплитуда и частота результирующего колебания определяется амплитудами и частотами складываемых колебаний, а начальная разность фаз оказывает влияние на начальную фазу результирующего движения. В данном случае уравнения движения и первого, и второго тел представляют собой сумму колебаний с одинаковыми амплитудами A_1, A_2 и циклическими частотами ω_1, ω_2. Следовательно, результирующие колебания и первого, и второго маятников будут описываться одинаковыми функциональными зависимостями, отличающимися друг от друга на константу (начальную фазу).

Итак, оба маятника будут колебаться с ***одинаковой частотой***, их амплитуда будет изменяться в одинаковом диапазоне, но колебательные движения будут иметь разные начальные фазы.

Для аналитического изучения характера движения маятников воспользуемся методом векторной диаграммы.

1.2. Сложение колебаний с помощью векторной диаграммы

Для применения метода векторной диаграммы представим каждое колебание в виде вектора, длина которого равна амплитуде, вращающегося вокруг начала координат с частотой, равной частоте колебаний (рис. 3). В произвольный момент времени t угол поворота вектора относительно оси OX равен фазе колебаний в этот момент времени. Тогда колебательному движению $A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ соответствует вектор $\vec{A}_1$ (длина вектора A_1, частота вращения ω_1, угол поворота в начальный момент времени φ_1, угол поворота вектора в момент времени t равен $\Phi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_1$); колебательному движению $A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ соответствует вектор $\vec{A}_2$ (длина вектора A_2, частота вращения ω_2, угол поворота в начальный момент времени φ_2, угол пово-

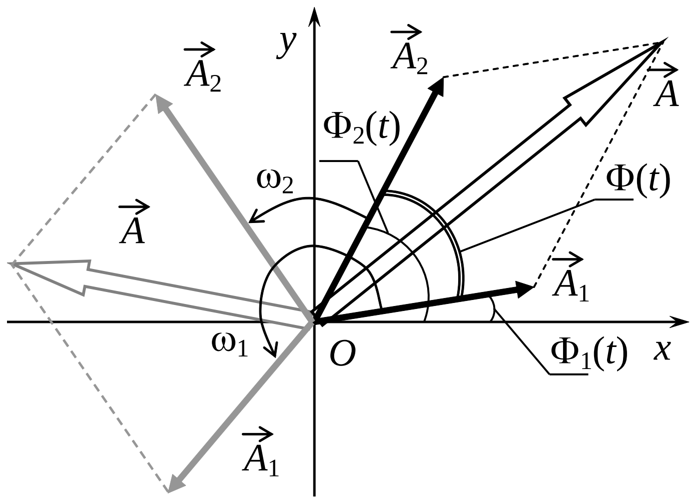

Рис. 3

рота вектора в момент времени t равен $\Phi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_2$). Положение каждого вектора зависит от времени.

Проекция каждого из векторов на ось OX дает закон изменения координаты каждого колебательного движения со временем (рис. 4). Результирующее колебание в любой момент времени легко построить по правилу параллелограмма $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Тогда проекция суммарного вектора $\vec{A}$ на ось OX даст закон изменения координаты результирующего движения (рис. 4)

$$x = A(t)\cos\Phi(t).$$

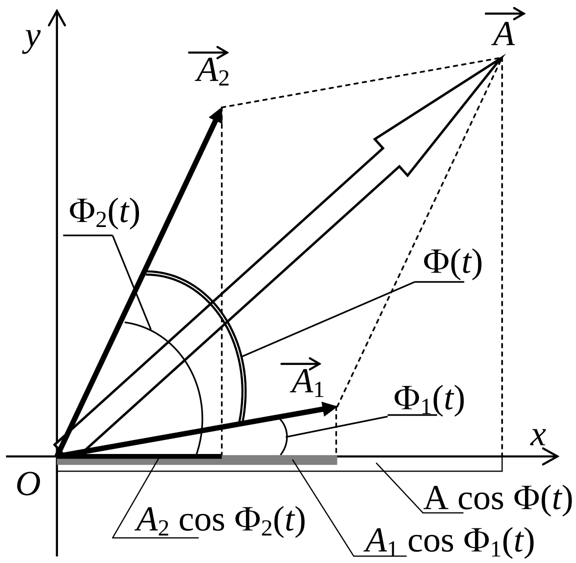

Рис. 4

Из геометрического построения определим фазу $\Phi(t)$ и амплитуду A результирующего движения. Тангенс угла поворота результирующего вектора

$$\operatorname{tg}\Phi(t) = \frac{A\sin\Phi(t)}{A\cos\Phi(t)} = \frac{A_1\sin\Phi_1(t) + A_2\sin\Phi_2(t)}{A_1\cos\Phi_1(t) + A_2\cos\Phi_2(t)}.$$

По теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[\Phi_2(t) - \Phi_1(t)].$$

Изменение амплитуды колебательного движения со временем по определенному закону $A(t)$ называется ***модуляцией***. Если модуляция является периодической, то кратчайшее время между двумя одинаковыми по фазе значениями амплитуды называется ***периодом модуляции*** T_Ω. Величина $\Omega = \frac{2\pi}{T_\Omega}$, обратная периоду, называется циклической ***частотой модуляции***.

С помощью векторной диаграммы рассмотрим особенности движения связанных маятников, когда оба маятников начинают двигаться без начальной скорости ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$)

$$x_1 = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t,$$
$$x_2 = A_1\cos\omega_1 t - A_2\cos\omega_2 t.$$

Тогда, движение первого тела можно представить в виде

$$x_1 = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t = C_1(t)\cos\Phi(t).$$

Подставим

$$\Phi_1(t) = \omega_1 t, \qquad \Phi_2(t) = \omega_2 t,$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(x_1(0) + x_2(0)), \qquad A_2 = \frac{1}{2}(x_1(0) - x_2(0)),$$

и получим амплитуду результирующего движения в виде

$$C_1^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[\Phi_2(t) - \Phi_1(t)] =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2(0) + x_2^2(0) + [x_1^2(0) - x_2^2(0)]\cos((\omega_1 - \omega_2)t)).$$

Обозначим разность частот складываемых колебаний через $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, а полусумму частот – через $\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. Тогда

$$\operatorname{tg}\Phi(t) = \frac{A_1\sin(\omega_1 t) + A_2\sin(\omega_2 t)}{A_1\cos(\omega_1 t) + A_2\cos(\omega_2 t)} =$$

$$= \frac{(A_1 + A_2)\sin(\overline{\omega}t)\cos(\Delta\omega t/2) + (A_1 - A_2)\cos(\overline{\omega}t)\sin(\Delta\omega t/2)}{(A_1 + A_2)\cos(\overline{\omega}t)\cos(\Delta\omega t/2) - (A_1 - A_2)\sin(\overline{\omega}t)\sin(\Delta\omega t/2)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\overline{\omega}t) + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}(\overline{\omega}t)\cdot\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}(\overline{\omega}t + \varphi),$$

или $\quad \Phi(t) = \overline{\omega}t + \varphi,$

где $\quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\Delta\omega t\right) = \dfrac{x_2(0)}{x_1(0)}\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\Delta\omega t\right).$

Таким образом, движение первого тела можно описать следующим образом $\quad x_1 = C_1(t)\cos\Phi(t),$

где $C_1(t) = \sqrt{\dfrac{1}{2}(x_1^2(0) + x_2^2(0) + [x_1^2(0) - x_2^2(0)]\cos(\Delta\omega t))},$

$$\Phi(t) = \overline{\omega}t + \varphi$$

или $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(x_1^2(0) + x_2^2(0) + [x_1^2(0) - x_2^2(0)]\cos(\Delta\omega t))}\cdot\cos(\overline{\omega}t + \varphi).$

Для того чтобы описать движение второго тела,

$$x_2 = A_1\cos\omega_1 t - A_2\cos\omega_2 t =$$

$$= A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos(\omega_2 t + \pi) = C_2(t)\cos\widetilde{\Phi}(t).$$

также воспользуемся векторной диаграммой, но второй вектор будет иметь дополнительную начальную фазу равную π. Тогда для движения второго тела можно аналогичным образом получить амплитуду

$$C_2^2 = \frac{1}{2}(x_1^2(0) + x_2^2(0) + [x_1^2(0) - x_2^2(0)]\cos((\omega_1 - \omega_2)t - \pi))$$

и фазу $\quad \widetilde{\Phi}(t) = \overline{\omega}t + \widetilde{\varphi} + \pi,$

где $\quad \operatorname{tg}\widetilde{\varphi} = \dfrac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\Delta\omega t\right) = \dfrac{x_1(0)}{x_2(0)}\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\Delta\omega t\right).$

Тогда координата движения второго тела: $x_2 = C_2(t)\cos\widetilde{\Phi}(t),$

где $C_2(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x_1^2(0) + x_2^2(0) + [x_1^2(0) - x_2^2(0)]\cos(\Delta\omega t - \pi)\right)}$,

$$\widetilde{\Phi}(t) = \overline{\omega}t + \widetilde{\varphi} + \pi$$

или

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x_1^2(0) + x_2^2(0) + [x_1^2(0) - x_2^2(0)]\cos(\Delta\omega t - \pi)\right)} \cdot \cos(\overline{\omega}t + \widetilde{\varphi} + \pi).$$

Из тригонометрии можно показать, что фазы φ и $\widetilde{\varphi}$ связаны между собой.

Таким образом, и из физических соображений, и с помощью математических выкладок было показано, что тела совершают колебания с одинаковой частотой, частоты изменения амплитуды (модуляции) также одинаковы.

2. Рабочие формулы

2.1. Зависимость частоты колебаний и частоты модуляции от начального положения маятников

Амплитуды колебательного движения первого $C_1(t)$ и второго $C_2(t)$ тела подчиняется одному и тому же закону модуляции

$$C(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x_1^2(0) + x_2^2(0) + [x_1^2(0) - x_2^2(0)]\cos(\Delta\omega t - \varphi_0)\right)} \Rightarrow$$

$$C(t) = C_1(t) \text{ при } \varphi_0 = 0,\ C(t) = C_2(t) \text{ при } \varphi_0 = \pi,$$

только модуляция второго тела сдвинута по фазе на π относительно модуляции первого. То есть, кода первое тело колеблется с максимальной амплитудой, второе тело колеблется с минимальной амплитудой. И наоборот. Амплитуда колебаний изменяется в пределах от $|x_1(0)|$ до $|x_2(0)|$ с частотой модуляции равной $\Delta\omega$. Если начальные отклонения равны по модулю $|x_1(0)| = |x_2(0)|$, то амплитуда колебаний не меняется (модуляция отсутствует) $C(t) = const$. Следовательно, оба маятника совершают гармонические колебания.

Частота модуляции* $\boldsymbol{\Omega = \Delta\omega}$ *не зависит от начального положения маятников $x_1(0)$ и $x_2(0)$, а зависит только от жесткости соединительной пружины k_0

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} - \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}}.$$

Частота колебаний обоих тел, вообще говоря, зависит от времени

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_2(0)}{x_1(0)}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right),$$

но при малой жесткости k_0 соединительной пружины разность частот складываемых колебаний $\Delta\omega$ мала, поэтому фазу φ можно считать приблизительно равной

$$\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi \approx \frac{1}{2}\frac{x_2(0)}{x_1(0)}\Delta\omega t.$$

Следовательно, частота колебания ω

$$\Phi(t) = \overline{\omega}t + \varphi \Rightarrow \omega \approx \overline{\omega} + \frac{1}{2}\frac{x_2(0)}{x_1(0)}\Delta\omega$$

не зависит от времени, но зависит от начального положения маятников. Если в начальный момент маятники имеют одинаковое начальное отклонение от положения равновесия $x_1(0) = x_2(0)$, оба тела будут колебаться с частотой

$$\omega = \overline{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) = \omega_1.$$

Если в начальный момент маятники имеют противоположные по знаку и одинаковые по величине начальные отклонения от положения равновесия $x_1(0) = -x_2(0)$, оба тела будут колебаться с частотой

$$\omega = \overline{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) = \omega_2.$$

Если в начальный момент один из маятников, например второй, находится в положении равновесия $x_2(0) = 0$, оба тела будут колебаться с частотой

$$\omega = \overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2).$$

Таким образом, ***частота колебаний маятников*** изменяется от ω_1 до ω_2 и ***зависит от начального положения маятников***.

2.2. Влияние модуляции на период колебательного движения

Периодом колебательного движения называется минимальное время между двумя одинаковыми по фазе положениями тела – время одного полного колебания.

Если тело движется по гармоническому закону (с постоянной амплитудой), то время T_0 между любыми двумя ближайшими точками с одинаковой фазой будет одинаково: между соседними минимумами, соседними максимумами и т.д.

Если при колебательном движении имеет место изменение амплитуды (модуляция), то период T колебательного движения зависит от скорости изменения амплитуды. Из рисунка 5 видно, что чем резче меняется амплитуда, тем сильнее отличается период модулированных колебаний от периода гармонических колебаний.

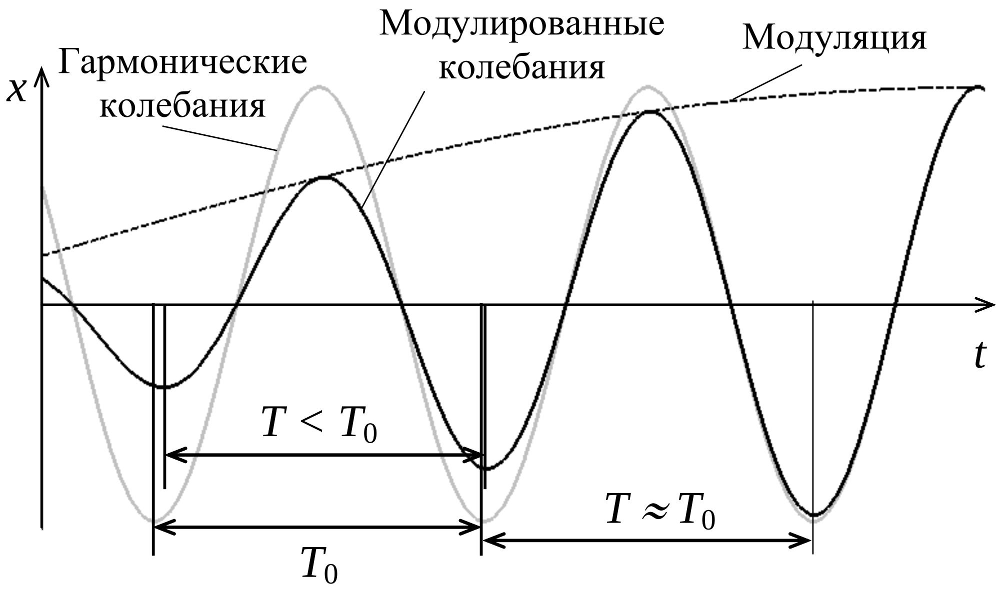

Рис. 5

Таким образом, для измерения периода модулированных колебаний следует использовать только время полного колебания, имеющего максимальную амплитуду.

3. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется процесс движения двух одинаковых пружинных маятников, связанных невесомой пружиной малой жесткости. Сопротивление внешней среды отсутствует. Сила тяжести и все компенсирующие ее силы направлены перпендикулярно направлению движения тел (перпендикулярно плоскости экрана) и не оказывает влияния на движение.

В каждом опыте тела начинают движение без начальной скорости. Начальное положение может изменяться от –6 см до 6 см относительно положения равновесия каждого тела. Для определения времени, за которое каждый маятник совершает заданное количество полных колебаний, используется секундомер, способный измерять время с точностью до 1 миллисекунды. В связи с тем, что период колебательного движения зависит от скорости модуляции, погрешность экспериментального определения частоты колебаний и частоты модуляции зависит от того насколько близко по времени расположены максимумы колебаний и модуляции. Поэтому при указанных условиях погрешность определения частоты колебаний не превышает 0,1%, а погрешность определения частоты модуляции – 5%.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы, порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит раскрывающуюся панель инструментов для выбора комплекта из двух одинаковых маятников, ползунки для изменения начального положения маятников и коэффициента жесткости соединительной пружины, секундомер для измерения времени движения маятников, а также вспомогательные кнопки, позволяющие управлять экспериментом.

Варианты выполнения работы

Вариант	Комплект тождественных маятников
1	Комплект 1
2	Комплект 2
3	Комплект 3
4	Комплект 4

Вариант	Комплект тождественных маятников
5	Комплект 5
6	Комплект 6
7	Комплект 7
8	Комплект 8

4. Порядок выполнения работы

4.1. Краткое описание хода работы

1. Выберите комплект маятников (по указанию преподавателя).
2. Установите первое тело в крайнее верхнее положение.
3. Установите второе тело в крайнее нижнее положение.
4. Установите минимальное значение коэффициента жесткости соединительной пружины.
5. Приведите маятники в движение.
6. Для каждого тела определите, через сколько полных колебаний наблюдалась максимальная амплитуда.
7. Вычислите частоту колебаний и частоту модуляции.

8. Повторите эксперимент для трех разных соединительных пружин, начиная с пункта 5.

9. Повторите эксперимент для пяти начальных положений второго тела, начиная с пункта 4.

10. Постройте графики зависимости частоты модуляции от начального положения маятников и от коэффициента жесткости соединительной пружины.

11. Постройте графики зависимости частоты колебаний от начального положения маятников и от коэффициента жесткости соединительной пружины.

12. Вычислите теоретические значения частот.

13. Сделайте выводы.

4.2. Детальное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

1. С помощью кнопок раскрывающейся панели инструментов ***«Комплект маятников»*** выберите маятники (по указанию преподавателя), которые будут участвовать в эксперименте. Под панелью инструментов ***«Комплект маятников»*** автоматически указываются значения коэффициента жесткости пружины и масса тела каждого маятника. Эти значения необходимы для вычисления теоретических значений частоты колебаний маятников.

2. Оба маятника являются физически тождественными. Чтобы изучить зависимость характеристик движения тел от начального положения тел, удобно зафиксировать начальное положения одного маятника, а начальное положение второго – менять.

Для определенности зафиксируем первый маятник. Начальное положение первого маятника можно изменять в интервале от –6 см до 6 см. Для облегчения проведения эксперимента с помощью ползунка ***«Начальное положение первого тела»*** установите первый маятник в крайнее верхнее положение и не изменяйте его положение в течение всей работы. Точное значение начального положения первого тела указывается под его ползунком.

3. Начальное положение второго маятника также можно изменять в интервале от –6 см до 6 см. С помощью ползунка ***«Начальное положение второго тела»*** установите второе тело в положение равновесия (отклонение второго маятника от положения равновесия в начальный момент времени равно нулю). При перемещении ползунка ***«Начальное положение второго тела»*** точное значение начального положения второго тела указывается под ползунком.

4. С помощью ползунка ***«Соединительная пружина»*** установите минимальное значение коэффициента жесткости соединительной пружины. Точное значение коэффициента жесткости указывается над его ползунком.

5. Нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Начнется движение маятников. Одновременно строятся три графика: графики зависимости от времени координат каждого тела и их относительного движения. Во время эксперимента кнопки панели инструментов и ползунки недоступны.

Секундомер включается автоматически при нажатии кнопки ***«Начать эксперимент»***. После завершения телом очередного полного колебания количество колебаний и время колебаний автоматически фиксируется в специальном окне секундомера для каждого тела отдельно.

Движение происходит в течение фиксированного времени.

ЗАПИШИТЕ ВСЕ ПОКАЗАНИЯ СЕКУНДОМЕРА В ТАБЛИЦУ.

Если в процессе эксперимента Вы вспомнили, что неправильно установили какую-либо величину (выбрали комплект маятников, жесткость соединительной пружины или установили начальные положения маятников), нажмите кнопку ***«Остановить эксперимент»***. Маятники остановятся. Кнопки панели инструментов и ползунки станут доступными. После этого можно сделать необходимые изменения и выполнить опыт заново.

6. Рассмотрите график зависимости координаты от времени для первого тела. В начальный момент времени тело имело максимальное отклонение от положения равновесия. Поэтому в начальный момент времени для первого тела всегда наблюдается максимум амплитуды. По графику подсчитайте, через сколько полных колебаний снова наблюдалась максимальная амплитуда.

В ТАБЛИЦЕ ОТМЕТЬТЕ, КОГДА НАБЛЮДАЛИСЬ МАКСИМУМЫ АМПЛИТУДЫ ДЛЯ ПЕРВОГО ТЕЛА.

Рассмотрите график зависимости координаты от времени для второго тела. В начальный момент времени отклонение тела может соответствовать как максимуму, так и минимуму в зависимости от установленного начального положения. По графику подсчитайте, через сколько полных колебаний у второго тела наблюдалась максимальная амплитуда.

В ТАБЛИЦЕ ОТМЕТЬТЕ, КОГДА НАБЛЮДАЛИСЬ МАКСИМУМЫ АМПЛИТУДЫ ДЛЯ ВТОРОГО ТЕЛА.

7. Для всех полученных значений времени вычислите период T колебаний как разницу между временем n колебаний и временем $(n – 1)$ колебания. Обратите внимание, как зависит период от удаленности от максимума амплитуды. Для каждого значения периода вычислите частоту колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Для частот, расположенных вблизи максимумов амплитуды, найдите среднее значение $< \omega >$.

Период T_Ω модуляции определяют, как время между максимумами амплитуды. Для каждого значения периода модуляции вычислите частоту модуляции $\Omega = \frac{2\pi}{T_\Omega}$. Если за время эксперимента наблюдалось больше двух максимумов амплитуды, вычислите среднюю частоту модуляции $< \Omega >$.

Обратите внимание! Если маятники совершают гармонические колебания (модуляция отсутствует), период и частоту модуляции определить невозможно.

8. С помощью ползунка ***«Соединительная пружина»*** измените коэффициент жесткости соединительной пружины произвольным образом и повторите эксперимент, начиная с пункта 5. Выполните эксперимент для трех значений коэффициента жесткости соединительной пружины.

9. С помощью ползунка ***«Начальное положение второго тела»*** измените начальное положение второго тела произвольным образом и повторите эксперимент, начиная с пункта 4. Выполните эксперимент для пяти начальных положений второго тела.

Рекомендуется выбрать **два отрицательных**, **два положительных** и **нулевое** (уже использованное при выполнении пункта 3) **значения начального положения второго тела** (координаты второго тела в начальный момент времени).

Для любой соединительной пружины и начального положения второго тела равного нулю (положение равновесия) зарисуйте графики зависимости от времени координат каждого тела, а также график их относительного движения. Графики также можно сохранить в виде bmp- или jpg-файлов с помощью кнопки ***«Сохранить графики»***.

На зарисованных или распечатанных графиках проведите (от руки) кривую модуляции для колебания первого и второго тел.

10. По результатам расчетов на одном графике постройте три кривые, описывающие зависимость частоты модуляции от начального положения второго маятника, соответствующие разным соединительным пружинам.

На другом графике постройте несколько кривых, описывающих зависимость частоты модуляции от коэффициента жесткости соединительной пружины, соответствующих разным начальным положениям второго маятника.

Какой характер носят построенные зависимости? Почему?

11. По результатам расчетов на третьем графике постройте три кривые, описывающие зависимость частоты колебаний первого маятника от начального положениям второго маятников, соответствующие разным соединительным пружинам.

На четвертом графике постройте несколько кривых, описывающих зависимость частоты колебаний первого маятника от коэффициента жесткости соединительной пружины, соответствующих разным начальным положениям второго маятника.

Какой характер носят построенные зависимости? Почему?

12. Вычислите теоретические значения циклических частот складываемых колебаний $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_0}{m}}$, среднюю частоту $\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ и разность частот $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. Сравните полученные значения с экспериментальными результатами: совпадает ли частота модуляции Ω с разностью частот $\Delta\omega$? Совпадает ли частота колебаний $< \omega >$ с частотами ω_1, ω_2, $\overline{\omega}$? При каких условиях?

13. Сделайте выводы.

Колеблются ли связанные маятники с одинаковыми частотами?

Одинакова ли частота модуляции связанных маятников?

В одинаковых ли пределах изменяется амплитуда колебаний связанных маятников? В каких?

Одинакова ли фаза колебаний и модуляции связанных маятников?

Как частота модуляции зависит от начального положения маятников?

Как частота модуляции зависит от жесткости соединительной пружины?

Как частота колебаний зависит от начального положения маятников?

Как частота колебаний зависит от жесткости соединительной пружины?

Таблица

	Первое тело: начальное положение ____ см				**Второе тело**: начальное положение ____ см			
Количество полных колебаний *n*	Максимум	Время *n*-колебаний *t*, с	Период колебаний *T*, с	Частота колебаний ω, рад/с	Максимум	Время *n*-колебаний *t*, с	Период колебаний *T*, с	Частота колебаний ω, рад/с
0	✓	0	——	——		0	——	——
1								
2								
…								
	Средняя частота колебаний <ω>, рад/с				Средняя частота колебаний <ω>, рад/с			
	Средняя частота модуляции <Ω>, рад/с				Средняя частота модуляции <Ω>, рад/с			

5. Контрольные вопросы

1. О какой системе говорят, что она имеет две степени свободы?
2. Запишите систему уравнений, описывающую движение пружинных маятников, связанных соединительной пружиной, колеблющихся вдоль одной прямой.
3. Запишите уравнения движения пружинных маятников, связанных соединительной пружиной, колеблющихся вдоль одной прямой.
4. Как сложить колебания с помощью векторной диаграммы?
5. Что такое модуляция?
6. С какими частотами могут колебаться связанные маятники?
7. Какова частота и амплитуда модуляции колебаний связанных маятников?
8. Могут ли связанные маятники совершать гармонические колебания? При каких условиях?

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей
физических процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодК–07
для студентов всех специальностей

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати __.__.2022. Формат 60х84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. ____. Уч.-изд.л. _____.
Заказ . Тираж 50 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru