МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Отделение естественных наук ШБИП

УТВЕРЖДАЮ
Директор ШБИП
___________ Д.В. Чайковский
«__»_________ 2022 г.

О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко

СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ. БИЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических
процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодК–05
для студентов всех специальностей

Издательство
Томского политехнического университета
2022

УДК 53. 076

Ревинская О.Г.
Сложение колебаний. Биения: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодК–05 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 21 с.

УДК 53.076

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим семинаром отделения естественных наук ШБИП
«___» _________ 20___ г.

Зав. ОЕН ШБИП
проф., доктор физ.-мат. наук В.П. Кривобоков

Председатель учебно-методической комиссии
А.В. Макиенко

Рецензент
доктор тех. наук, профессор Томского политехнического университета
В.А. Москалев

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодК–05 ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Сложение колебаний. Биения

Цель работы: изучение особенностей движения тела, участвующего в двух одинаково направленных колебательных движениях. Определение из биений частоты собственных колебаний маятника и амплитуд складываемых колебаний.

1. Теоретическое содержание

Многие колебательные системы могут одновременно участвовать в нескольких колебательных процессах. Под ***сложением*** колебаний понимают нахождение закона движения тела, участвующего одновременно в нескольких колебательных процессах.

Любое движение можно представить как сумму двух или более движений, имеющих разные направления. Под ***направлением колебаний*** понимают направление, совпадающее с направлением положительного смещения колеблющейся величины из положения равновесия. При сложении колебаний наибольший интерес представляет сложение одинаково направленных либо перпендикулярных колебаний. Колебания считаются перпендикулярными, если они происходят в одной плоскости вдоль взаимно перпендикулярных прямых. Колебания считаются одинаково направленными, если они происходят в одной плоскости вдоль параллельных прямых.

Рассмотрим сложение двух одинаково направленных колебаний, которые совершаются вдоль оси ОХ декартовой системы координат с амплитудами A_1 и A_2, частотами ω_1 и ω_2, начальными фазами φ_1 и φ_2, соответственно

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)\,;$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Результирующее движение также является одномерным и совершается вдоль той же ОХ декартовой системы координат.

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

1.1. Сложение колебаний с помощью векторной диаграммы

Для сложения одинаково направленных колебаний наиболее эффективным методом является метод векторной диаграммы. Для применения этого метода представим каждое колебание в виде вектора, длина которого равна амплитуде, вращающегося вокруг начала координат с частотой, равной частоте колебаний (рис. 1).

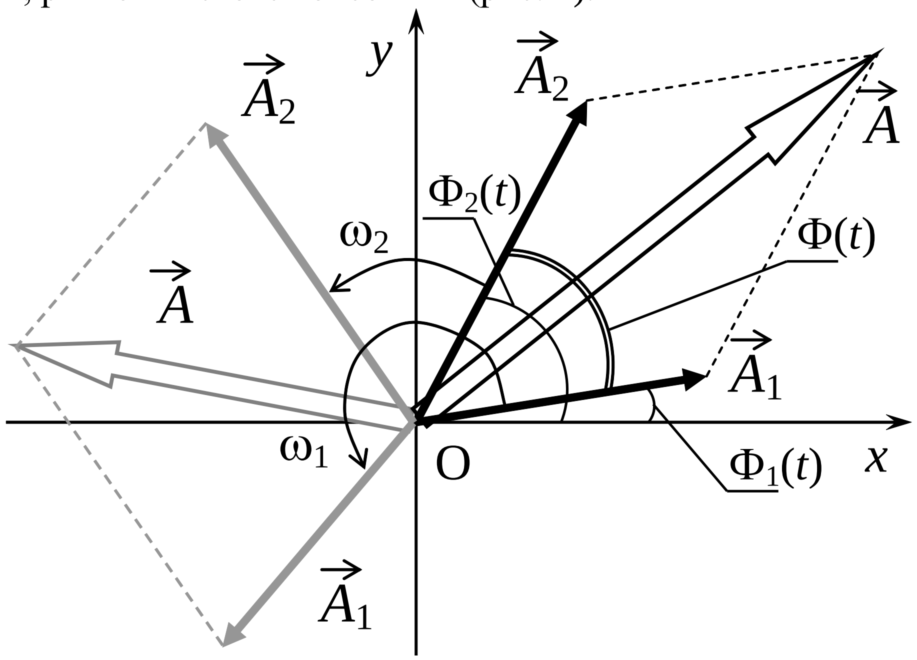


Рис. 1

В произвольный момент времени t угол поворота вектора относительно оси OX равен фазе колебаний в этот момент времени. Тогда колебательному движению $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ соответствует вектор $\vec{A}_1$ (длина вектора A_1, частота вращения ω_1, угол поворота в начальный момент времени φ_1, угол поворота вектора в момент времени t равен $\Phi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_1$); колебательному движению $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ соответствует вектор $\vec{A}_2$ (длина вектора A_2, частота вращения ω_2, угол поворота в начальный момент времени φ_2, угол поворота вектора в момент времени t равен $\Phi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_2$). Положение каждого вектора зависит от времени. Проекция каждого из векторов на ось OX дает закон изменения координаты каждого колебательного движения со временем.

Результирующее колебание в любой момент времени легко построить по правилу параллелограмма $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Тогда проекция суммарного вектора $\vec{A}$ на ось OX даст закон изменения координаты результирующего движения

$$x = A \cos \Phi(t).$$

Из геометрии построения определим фазу $\Phi(t)$ и амплитуду A результирующего движения. Тангенс угла поворота результирующего вектора

$$\operatorname{tg} \Phi(t) = \frac{A \sin \Phi(t)}{A \cos \Phi(t)} = \frac{A_1 \sin \Phi_1(t) + A_2 \sin \Phi_2(t)}{A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Phi_2(t)}.$$

По теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[\Phi_2(t) - \Phi_1(t)].$$

1.2. Когерентные и некогерентные колебания

Гармонические колебания x_1 и x_2 называются ***когерентными***, если их разность фаз не зависит от времени $\Delta\Phi = \Phi_2(t) - \Phi_1(t) = const$. Это возможно только, если частоты колебаний одинаковы $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда $\Delta\Phi = \Phi_2(t) - \Phi_1(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$.

При сложении когерентных колебаний амплитуда результирующего колебания также не зависит от времени

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

С помощью тригонометрических тождеств тангенс фазы результирующего колебания можно представить в виде

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{\operatorname{tg}\omega t + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\omega t \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}(\omega t + \varphi),$$

$$\text{где} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Фаза результирующих колебаний линейно зависит от времени. Тогда результирующее колебание является ***гармоническим*** колебанием с частотой складываемых колебаний и начальной фазой φ

$$x = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Если начальные фазы когерентных колебаний равны $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, то амплитуда результирующих колебаний будет равна сумме амплитуд складываемых колебаний $\quad x = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \varphi)$.

Гармонические колебания x_1 и x_2 называются ***некогерентными***, если их разность фаз зависит от времени $\Delta\Phi = \Phi_2(t) - \Phi_1(t) \neq const$. Это возможно только, если частоты колебаний различны $\omega_1 \neq \omega_2$. При сложении таких колебаний получаются ***негармонические*** результирующие колебания. В этом случае разность фаз $\Delta\Phi$ непрерывно меняется. Поэтому построенный на векторах $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ параллелограмм непрерывно деформируется, а его диагональ (результирующий вектор $\vec{A}$) изменяется по длине и вращается с переменной угловой скоростью

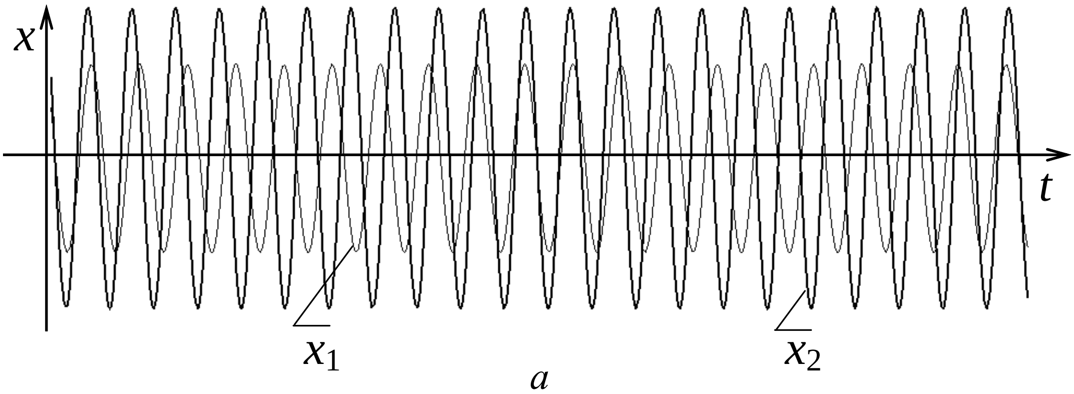
$$x = A(t)\cos\Phi(t).$$

При сложении некогерентных колебаний разность фаз $\Delta\Phi = \Phi_2(t) - \Phi_1(t)$ изменяется со временем, тогда косинус $\cos\Delta\Phi$ изменяется от –1 до 1, следовательно, амплитуда результирующего движения с течением времени изменяется от разности $|A_1 - A_2|$ до суммы $A_1 + A_2$ амплитуд складываемых колебаний.

Фаза результирующего колебания $\Phi(t)$ зависит от времени не линейно. Поэтому, несмотря на то, что вектора $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ равномерно вращаются вокруг начала координат, вектор $\vec{A}$ результирующего движения будет вращаться неравномерно, то ускоряясь, то замедляясь.

1.3. Биения

Негармонические колебания, получающиеся в результате сложения одинаково направленных гармонических колебаний с близкими частотами $\omega_1 \approx \omega_2$, называются ***биениями*** (рис. 2*а*). Другими словами разница между частотами складываемых колебаний должна быть много меньше любой из этих частот: $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1$ и $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_2$ (критерий наблюдения биений).



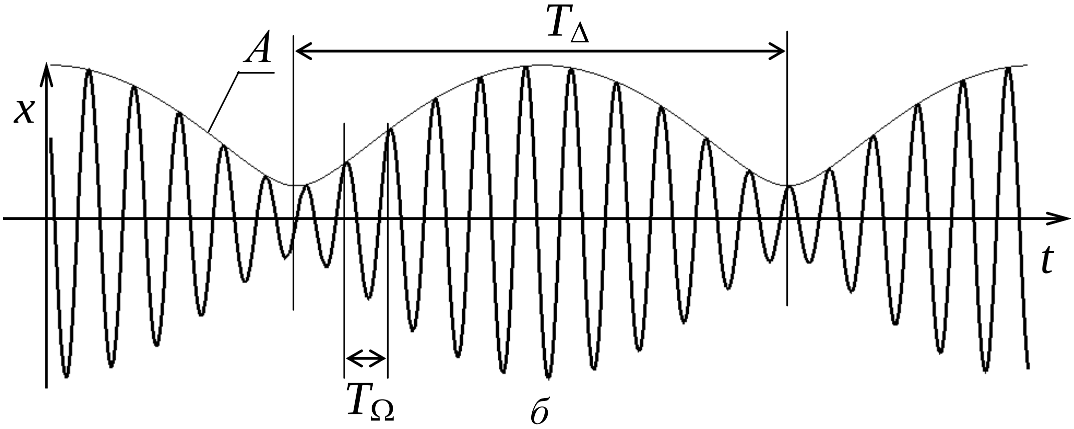


Рис. 2

За начало отсчета времени примем момент $t_0 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\omega_1 - \omega_2}$, когда фазы обоих складываемых колебаний x_1 и x_2 совпадают и равны $\varphi_0 = \frac{\varphi_2\omega_1 - \varphi_1\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}$. Для простоты анализа полученных далее выражений найдем среднюю частоту складываемых колебаний $\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ и разность частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Так как частоты $\omega_1 \approx \omega_2$ близки, разность частот $|\Delta\omega|$ – малая величина. Частоты складываемых колебаний можно выразить через введенные величины: $\omega_1 = \overline{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega$, $\omega_2 = \overline{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega$. При этом складываемые колебания примут вид

$$x_1 = A_1 \cos\left(\overline{\omega}t + \varphi_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right),$$
$$x_2 = A_2 \cos\left(\overline{\omega}t + \varphi_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega t\right).$$

Тогда разность фаз складываемых колебаний слабо зависит от времени $\Delta\Phi = \Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \Delta\omega t$. Амплитуда результирующего колебания

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\omega t)$$

медленно меняется со временем. С помощью тригонометрических тождеств тангенс фазы результирующего колебания можно представить в виде

$$\operatorname{tg}\Phi(t) = \frac{\operatorname{tg}(\overline{\omega}t + \varphi_0) + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}(\overline{\omega}t + \varphi_0)\cdot\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}(\overline{\omega}t + \varphi_0 + \varphi),$$
$$\text{где}\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right).$$

Тангенс φ зависит от времени, поэтому фаза колебаний имеет сложную зависимость от времени $\Phi(t) = \overline{\omega}t + \varphi_0 + \varphi(t)$.

Таким образом, результирующие колебания описываются уравнением (рис. 2*б*)

$$x = A(t)\cos(\overline{\omega}t + \varphi_0 + \varphi(t)),$$
$$\text{где}\qquad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\omega t),$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right).$$

Для определения зависимости дополнительной фазы φ от времени учтем, что частоты складываемых колебаний близки $\omega_1 \approx \omega_2$, разность частот $\Delta\omega$ – малая величина. Модуль отношение амплитуд меньше единицы $\left|\frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\right| < 1$. Следовательно, тангенс дополнительной фазы φ тоже малая величина. Разложим тангенс в правой и левой части в ряд до первого порядка малости ($\operatorname{tg} x \approx x$)

$$\varphi \approx \frac{1}{2}\frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\Delta\omega t.$$

Тогда полная фаза результирующего колебания линейно зависит от времени

$$\overline{\omega}t + \varphi(t) + \varphi_0 \approx \overline{\omega}t + \frac{1}{2}\frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\Delta\omega t + \varphi_0.$$

Результирующее колебание можно записать в виде

$$x = A(t)\cos(\Omega t + \varphi_0),$$
$$\text{где}\quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\omega t),$$
$$\text{частота колебаний}\quad \Omega \approx \overline{\omega}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\cdot\frac{\Delta\omega}{\overline{\omega}}\right).$$

В зависимости от соотношения амплитуд частота Ω результирующих колебаний может быть как меньше, так и больше средней частоты складываемых колебаний $\overline{\omega}$.

При сложении одинаково направленных гармонических колебаний с разными амплитудами $A_1 \neq A_2$ и близкими частотами $\omega_1 \approx \omega_2$ результирующие колебания (биения) совершаются с частотой Ω, при этом амплитуда колебаний медленно меняется со временем от разности до суммы амплитуд складываемых колебаний по периодическому закону. Частота изменения амплитуды биений равна разности частот складываемых колебаний $\Delta\omega$ и называется ***частотой биений***. Тогда величина $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$ называется ***периодом колебаний***, а величина $T_\Delta = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ – ***периодом биений*** (рис. 2).

Критерий наблюдения биений можно записать в виде $\left|\frac{\Delta\omega}{\overline{\omega}}\right| << 1$ или $T_\Omega << T_\Delta$. Другими словами, биения наблюдаются, если за один период изменения амплитуды тело совершает много колебаний.

Частный случай, когда складываются колебания с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2$ ($\varphi = 0$), описывается более простыми уравнениями

$$x = A(t)\cos(\overline{\omega}t + \varphi_0),$$

где $$A^2 = 2A_1^2(1 + \cos(\Delta\omega t)) = 4A_1^2\cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right),$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{A^2} = 2A_1\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right)} \Rightarrow A = 2A_1\cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right).$$

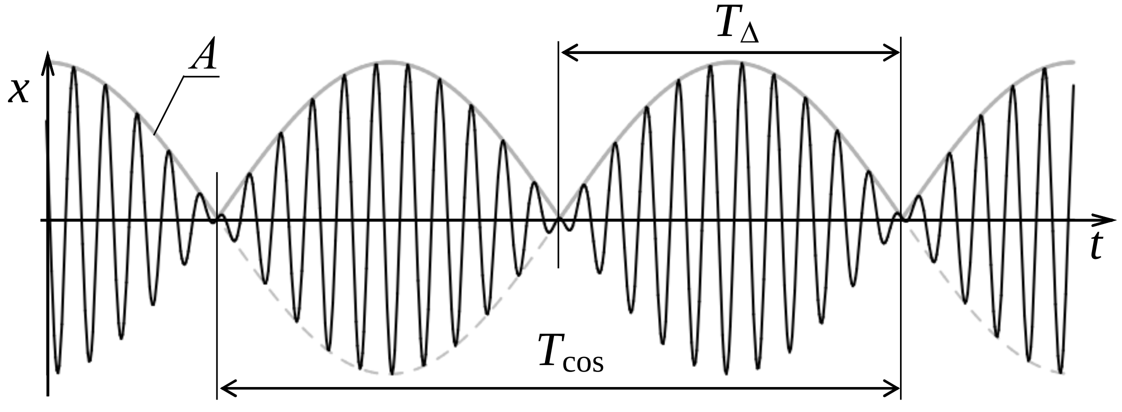


Рис. 3

Из приведенных выражений видно, что при сложении одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2$ и близкими частотами $\omega_1 \approx \omega_2$ результирующие колебания (биения) совершаются со средней частотой $\overline{\omega}$, при этом амплитуда колебаний медленно меняется со временем от нуля до $2A_1$ по гармоническому закону. Период функции $\cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right)$ равен $T_{\cos} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\Delta\omega}$, но так как косинус половину периода принимает положительные и половину периода отрицательные значения, а по определению амплитуда – положительная величина, то за период $T_{\cos}$ будет наблюдаться 2 периода изменения амплитуды T_Δ. Следовательно, период биений (период изменения амплитуды) равен $T_\Delta = \frac{1}{2}T_{\cos} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, а частота биений равна разности частот складываемых колебаний $\Delta\omega$ (рис. 3).

2. Рабочие формулы

Наблюдая биения, можно определить наибольшую $A_{\max}$ и наименьшую $A_{\min}$ амплитуду результирующих колебаний. Если минимальная амплитуда $A_{\min}$ отлична от нуля, то наблюдается сложение колебаний с разными амплитудами. Будем считать, что амплитуда первого колебания больше $A_1 > A_2$. Тогда

$$A_{\max} = A_1 + A_2;\ A_{\min} = A_1 - A_2.$$

Отсюда легко определить амплитуды складываемых колебаний

$$A_1 = \frac{1}{2}(A_{\max} + A_{\min});\ A_2 = \frac{1}{2}(A_{\max} - A_{\min}).$$

При биениях результирующие колебания происходят с постоянной частотой Ω. С помощью секундомера можно определить период и вычислить частоту результирующих колебаний Ω. Если частота одного из колебаний, например ω_2, известна, то можно определить частоту другого колебания ω_1. Для этого в выражении для Ω вернемся к частотам ω_1, ω_2 (через $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$) и используем $A_{\max} = A_1 + A_2$ и $A_{\min} = A_1 - A_2$:

$$\Omega \approx \bar{\omega} - \frac{1}{2}\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\Delta\omega = \bar{\omega} - \frac{1}{2}\frac{A_{\min}}{A_{\max}}\Delta\omega =$$

$$= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{2}\frac{A_{\min}}{A_{\max}}(\omega_2 - \omega_1),$$

$$2\Omega A_{\max} \approx (A_{\max} + A_{\min})\omega_1 + (A_{\max} - A_{\min})\omega_2.$$

Из этого уравнения можно выразить искомую величину ω_1 через две известные ω_2 и Ω:

$$\omega_1 \approx 2\Omega\frac{A_{\max}}{A_{\max} + A_{\min}} - \omega_2\frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}.$$

Если частоты складываемых колебаний настолько близки, что $\left|\frac{\Delta\omega}{\overline{\omega}}\right| \to 0$, то $\Omega \approx \overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, и следовательно, искомую величину ω_1 можно вычислить следующим образом: $\omega_1 \approx 2\Omega - \omega_2$.

Таким образом, если частота ω_2 одного из складываемых колебаний известна, измерив наибольшую $A_{\max}$ и наименьшую $A_{\min}$ амплитуды и частоту Ω суммарных колебаний, можно определить параметры складываемых колебаний – амплитуды A_1, A_2 и неизвестную частоту ω_1.

2.1. Зависимость характера результирующего движения от соотношения частот складываемых колебаний

Как было показано выше, биения наблюдаются только при определенном соотношении частот. Для того чтобы определить в каком диапазоне частот можно наблюдать биения, рассмотрим, как меняется характер результирующего движения от соотношения частот складываемых колебаний.

Было показано, что начальная фаза складываемых колебаний не влияет на частоту и амплитуду результирующих колебаний. Поэтому за начало отсчета времени примем момент t_0, когда фазы обоих складываемых колебаний x_1 и x_2 совпадают; систему координат расположим так, чтобы начальная фаза была равна нулю.

Тогда закон изменения результирующего движения можно записать двумя способами:

$$x = A_1\cos(\omega_1 t) + A_2\cos(\omega_2 t), \quad \text{либо} \quad x = A(t)\cos(\overline{\omega}t + \varphi(t)),$$

$$\text{где} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right), \qquad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\omega t).$$

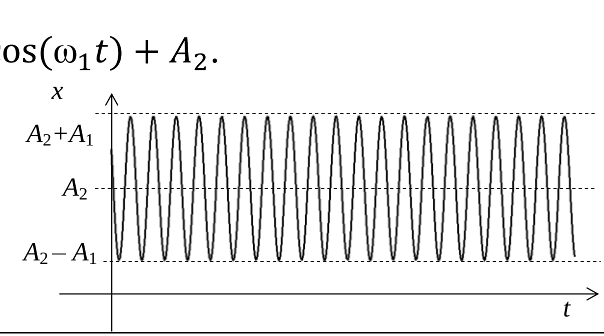
Выбор способа записи закона результирующего движения связан с удобством анализа характера движения.

Зафиксируем частоту ω_1 первого колебания. Рассмотрим, как изменится характер результирующего движения в зависимости от частоты второго колебания ω_2.

1. $\omega_2 = 0$ ($|\Delta\omega| = \overline{\omega}$).

Уравнение движения: $x = A_1\cos(\omega_1 t) + A_2$.

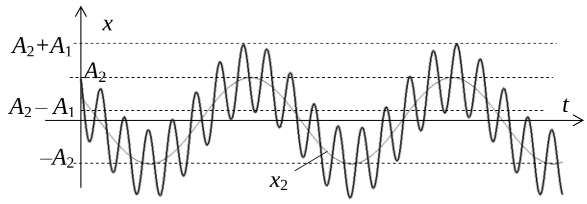
<u>Вывод:</u> гармоническое движение с постоянной частотой ω_1 и с постоянной амплитудой, положение равновесия которого поднято на величину A_2 – ***гармонические колебания***.



2. $\omega_2 > 0$, $\omega_2 << \omega_1$ ($|\Delta\omega| \approx \overline{\omega}$).

Уравнение движения: $x = A_1\cos(\omega_1 t) + A_2\cos(\omega_2 t)$.

Период первого колебания много меньше периода второго колебания. В течение периода первого колебания второе колебание меняется незначительно. В течение каждого периода первого колебания результирующее движение можно рассматривать, как гармоническое со смещенным положением равновесия (случай 1). Однако от периода к периоду смещение положения равновесия меняется.

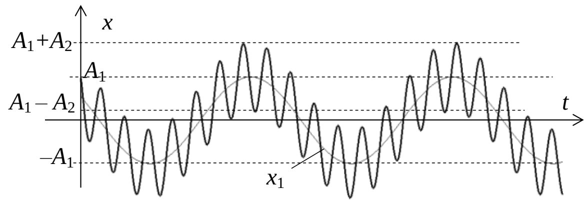


<u>**Вывод:**</u> гармоническое движение с постоянной частотой ω_1, положение равновесия которого колеблется по гармоническому закону от $-A_2$ до A_2 – ***колебания с переменным положением равновесия***.

3. $\omega_2 >> \omega_1$ ($|\Delta\omega| \approx \overline{\omega}$).

Уравнение движения: $x = A_1\cos(\omega_1 t) + A_2\cos(\omega_2 t)$.

Период второго колебания много меньше периода первого колебания. (Анализ характера движения аналогичен случаю 2.)

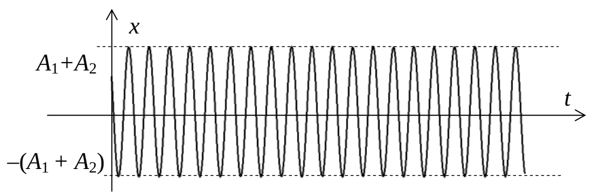


<u>**Вывод:**</u> гармоническое движение с постоянной частотой ω_2, положение равновесия которого колеблется по гармоническому закону от $-A_1$ до A_1 – ***колебания с переменным положением равновесия***.

4. $\omega_2 = \omega_1$ ($\Delta\omega = 0$).

Уравнение движения: $x = (A_1 + A_2)\cos(\omega_1 t)$.

Сложение когерентных колебаний.



<u>**Вывод:**</u> гармоническое движение с постоянной частотой ω_1 и постоянной амплитудой $A_1 + A_2$ – ***гармонические колебания***.

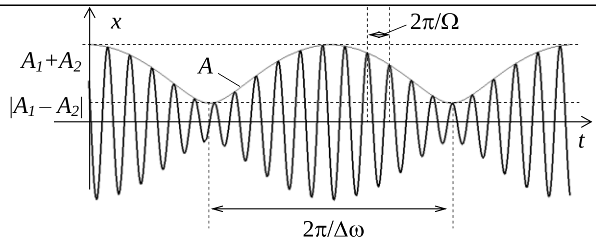
5. $\omega_2 \approx \omega_1$ ($|\Delta\omega| \to 0$), $|\Delta\omega| << \overline{\omega}$.

Уравнение движения: $x = A(t)\cos(\Omega t)$,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\omega t), \qquad \Omega \approx \overline{\omega} + \frac{1}{2}\cdot\frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\cdot\Delta\omega.$$

Частота, а, следовательно, и период результирующих колебаний не зависит от времени. Период изменения амплитуды много больше периода колебаний.

Вывод: ***биения*** – гармоническое движение с постоянной частотой Ω, амплитуда которого медленно меняется от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$.

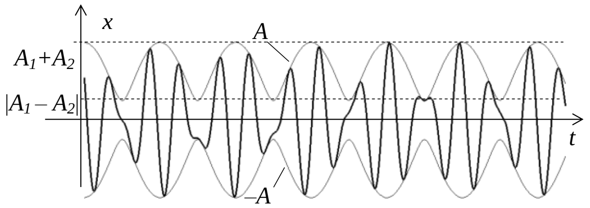


6. $\omega_2 \neq \omega_1$ ($|\Delta\omega| > 0$), $|\Delta\omega| < \overline{\omega}$ – все виды движения, не относящиеся к случаям 1–5.

Уравнение движения: $x = A(t)\cos(\overline{\omega}t + \varphi(t))$,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\omega t), \qquad \mathrm{tg}\,\varphi(t) = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right).$$

Разность частот не бесконечно малая величина, поэтому для определения дополнительной фазы $\varphi(t)$ не достаточно одного члена в разложении в ряд тангенса $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right)$.



Разложение тангенса в ряд до второго порядка малости позволяет получить дополнительную фазу в виде

$$\varphi(t) \approx \frac{\Delta\omega}{2}\frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\left(1 + \frac{1}{12}(\Delta\omega t)^2\right) \cdot t.$$

То есть частота колебаний Ω зависит от времени

$$\Omega \approx \overline{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}\left(1 + \frac{1}{12}(\Delta\omega t)^2\right).$$

Период изменения амплитуды незначительно больше периода колебаний.

Вывод: движение с переменной частотой и переменной амплитудой – ***негармонические колебания***.

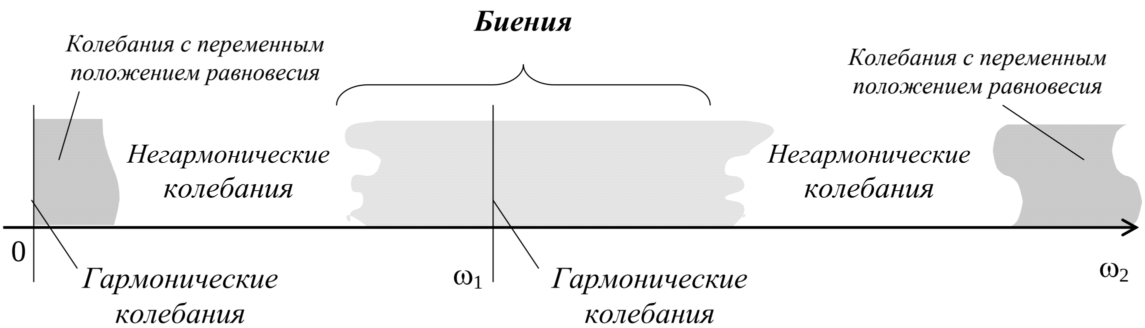


Рис. 4

Описанные случаи не имеют четко выраженных границ на шкале частот, а плавно переходят один в другой (рис. 4). Все области частот, в которых наблюдается движение одного вида, расположены как справа, так и слева от зафиксированной частоты ω_1. Протяженность областей с одинаковым характером движения не одинакова справа и слева от зафиксированной частоты ω_1 и зависят от значения этой частоты.

3. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется процесс сложения двух гармонических колебаний: собственных колебаний пружинного маятника по закону $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$ и гармонических колебаний внешней силы по закону $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$ ($A_1 > A_2$). Оба колебания совершаются в одном направлении. Сопротивление среды отсутствует. Сила тяжести и все компенсирующие ее силы направлены перпендикулярно направлению движения маятника (перпендикулярно плоскости экрана) и не оказывает влияния на движение.

Вынуждающая сила в работе изображена в виде вертикального металлического стержня, который может двигаться в вертикальном направлении по гармоническому закону с различными частотами. Пружинный маятник присоединен к нижнему торцу стержня. Для того чтобы стержень мог колебаться с различными частотами без потери энергии, он должен приводиться в движение каким-либо механизмом. Устройство механизма может быть различным. Колебания стержня могут генерироваться, например, электромагнитом, равномерно вращающимся диском или каким-либо другим способом. Характер устройства, создающего внешнюю силу, не оказывает влияния на процесс сложения колебаний. Поэтому внешний вид устройства, заставляющего стержень двигаться гармонически, в работе не приводится (изучение устройства не является целью работы). Однако, устройство таково, что внешняя сила совершает гармонические колебания по закону $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$ в том же направлении, что и пружинный маятник. Частота вынуждающей силы для различных опытов может быть выбрана из диапазона 0–10 рад/с и не может быть изменена во время проведения опыта. Изменение частоты вынуждающей силы не влияет на амплитуды складываемых колебаний.

Для определения амплитуды результирующих колебаний в работе используется измерительный прибор, способный измерять координату с точностью до 0,005 см. Изменять частоту внешней силы можно в диапазоне от 0 до 10 рад/с с точностью 0,01 рад/с. Для определения времени, за которое маятник совершает заданное количество колебаний, используется секундомер, способный измерять время с точностью до 1 миллисекунды. При указанных условиях погрешность определения амплитуды собственных колебаний и амплитуды внешней силы в эксперименте не превышает 1 %, а погрешность определения частоты собственных колебаний в эксперименте не превышает 2–3 %.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит ползунок для изменения частоты внешней силы, панель инструментов с кнопками для выбора маятника, секундомер для измерения времени движения маятника, ползунок для измерения координаты маятника, а также вспомогательные кнопки и переключатель, позволяющий регулировать использование секундомера.

Варианты выполнения работы

Вариант	**Маятник**	**Вариант**	**Маятник**
1	Маятник 1	9	Маятник 9
2	Маятник 2	10	Маятник 10
3	Маятник 3	11	Маятник 11
4	Маятник 4	12	Маятник 12
5	Маятник 5	13	Маятник 13
6	Маятник 6	14	Маятник 14
7	Маятник 7	15	Маятник 15
8	Маятник 8	16	Маятник 16

4. Порядок выполнения работы

4.1. Краткое описание хода работы

1. Выберите маятник (по указанию преподавателя).
2. Установите минимальное значение частоты внешней силы.
3. Постройте график координаты тела.
4. Определите, к какому типу относится данное колебательное движение.
5. Установите новое значение частоты внешней силы и определите тип движения.
6. Исследуйте всю доступную область частот. Определите границы каждого типа движения.
7. Для биений определите границы диапазона более точно.

8. Перейдите в режим использования секундомера.

9. Установите частоту внешней силы, равной частоте, соответствующей началу диапазона биений.

10. Постройте график координаты тела и измерьте время нескольких колебаний.

11. По графику измерьте наибольшую и наименьшую амплитуду колебаний тела.

12. Выберите другую частоту внешней силы. Повторите опыт, начиная с пункта 10.

13. Повторяйте опыты, пока не достигнете конца диапазона биений.

14. Для каждого опыта рассчитайте частоту собственных колебаний и амплитуды складываемых колебаний.

15. Вычислите среднее значение частоты собственных колебаний и средние значения амплитуд складываемых колебаний.

16. Вычислите относительную и абсолютную погрешность частоты собственных колебаний и амплитуд.

17. Вычислите теоретическое значение частоты собственных колебаний маятника.

18. Сделайте вывод.

4.2. Подробное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

1. С помощью кнопок на панели инструментов ***«Маятник»*** выберите маятник (по указанию преподавателя). Под кнопками автоматически указываются значения коэффициента жесткости пружины и масса тела для выбранного маятника. Эти значения необходимы для вычисления теоретических значений частоты собственных (горизонтальных) колебаний.

ЭТАП 1. Определение диапазона биений

2. С помощью ползунка ***«Частота»*** установите минимально возможное значение частоты внешней силы. Точное значение установленной частоты указывается над ползунком в виде: «Частота внешней силы (рад/с): *.**».

3. Постройте график координаты тела.

Для этого нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Начнется движение маятника. Одновременно строятся графики зависимости координаты тела от времени $x = x(t)$ и графики складываемых колебаний $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$. Движение происходит в течение фиксированного времени. Кнопки на панели инструментов «Маятник» и ползунок «Частота» во время движения маятника остаются недоступными. Когда время эксперимента закончится, маятник автоматически остановится.

Если в процессе эксперимента Вы вспомнили, что неправильно установили какую-либо величину (выбрали маятник или частоту внешней силы), нажмите кнопку «Остановить эксперимент». Маятник остановятся. Кнопки на панели инструментов «Маятник» и ползунок «Частота» станут доступными. После этого можно сделать необходимые изменения и повторить опыт.

4. Рассмотрите график зависимости координаты тела от времени $x = x(t)$. Определите, к какому типу относится данное колебательное движение: гармонические, колебания с переменным положением равновесия, биения, негармонические колебания. Для этого сравните полученный график с графиками, описанными в методических указаниях. Обратите внимание, что гармонические колебания, колебания с переменным положением равновесия и биения имеют ярко выраженный характер, который можно идентифицировать на глаз. Движения, которые нельзя однозначно отнести ни к одному из этих трех типов, следует считать негармоническим.

5. Нажмите на кнопка ***«Очистить график»***, расположенную ниже графика зависимости координаты тела от времени, чтобы очистить его. С помощью ползунка ***«Частота»*** установите новое значение частоты внешней силы больше предыдущего на **0,5 рад/с**. Повторите опыт, начиная с пункта 3.

6. Исследуйте всю доступную область частот **от 0 до 10 рад/с.** Для этого как в пункте 4 определите, к какому типу относится результирующее колебательное движение для каждого из следующих значений частоты внешней силы: **0**; **0,5**; **1**; **2** и далее до **10 рад/с** с шагом **1 рад/с**.

Проанализируйте, в каких диапазонах частот наблюдаются колебания с переменным положением равновесия, биения и негармонические колебания. Чтобы удобнее было анализировать тип колебательного движения, перед каждым опытом очистите график зависимости координаты тела от времени с помощь кнопки ***«Очистить график»***.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 1.

Из проделанных опытов для каждого типа движения выберите частоту, позволяющую получить НАИБОЛЕЕ ХАРАКТЕРНЫЙ ВИД зависимости координаты тела от времени $x = x(t)$. Зарисуйте или сохраните в виде bmp- или jpg-файла эти зависимости (по одной для каждого типа). Чтобы сохранить график, нажмите кнопку ***«Сохранить график»***.

7. Уточнение границ диапазона биений с точностью **0,1 рад/с**.

Колебательное движение считается биениями, если оно совершается с периодически изменяющейся амплитудой, и если за один период изменения амплитуды тело совершает много (>5) колебаний (т.к. складываются колебания с близкими частотами).

Поэтому с помощью ползунка ***«Частота»*** установите минимальную частоту, при которой ранее наблюдались биения. Уменьшите частоту внешней силы на 0,1 рад/с. Выполните эксперимент (см. пункт 3). Проанализируйте получившийся в результате график зависимости координаты тела от времени. Если полученное колебательное движение также можно считать биениями, уменьшите частоту внешней силы еще на 0,1 рад/с. Повторяя исследования аналогичным образом, определите минимальную частоту, при которой за один период изменения амплитуды тело совершает больше пяти колебаний.

Также уточните и верхнюю границу биений: установите максимальную частоту, при которой наблюдались биения в процессе выполнения пункта 6; последовательно увеличивайте частоту на 0,1 рад/с, пока колебания можно считать биениями.

Полученный диапазон биений (минимальное и максимальное значение частоты) ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 1.

Этап 2. Биения. Определение характеристик складываемых колебаний.

8. Перейдите в режим использования секундомера.

Для этого на секундомере установите переключатель (флажок) ***«Использовать секундомер»***. Счетчик «Количество колебаний» и поле «Время» секундомера станут доступными. Тогда после нажатия кнопки «Начать эксперимент» одновременно с движением тела запустится секундомер. Секундомер остановится автоматически после того, как тело совершит заданное количество колебаний.

9. С помощью ползунка ***«Частота»*** установите частоту внешней силы, соответствующую началу диапазона биений (минимальная частота, при которой наблюдаются биения).

С помощью счетчика ***«Количество колебаний»*** установите число полных колебаний, время которых будет измерять секундомер. Чтобы максимально снизить погрешность измерения периода колебаний, **рекомендуется** во всех последующих опытах устанавливать максимально возможное количество колебаний.

10. Постройте график координаты тела и измерьте время нескольких колебаний.

Для этого нажмите кнопку ***«Начать эксперимент»***. Начнется движение маятника. Одновременно включится секундомер, и будут строиться графики зависимости координаты тела от времени $x = x(t)$ и графики складываемых колебаний $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$. Кнопки на панели инструментов «Маятник» и ползунок «Частота» станут недоступными. Движение будет происходить в течение фиксированного времени. Секундомер остановится автоматически после того, как тело совершит заданное количество колебаний, а тело продолжит двигаться до окончания времени эксперимента. Когда время эксперимента закончится, маятник автоматически остановится.

ВРЕМЯ КОЛЕБАНИЙ И КОЛИЧЕСТВО КОЛЕБАНИЙ ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 2.

11. Справа от графика зависимости координаты тела от времени расположен ползунок ***«Измерение координаты»***, с движением которого синхронизована измерительная линия. Перемещая ползунок ***«Измерение координаты»***, совместите измерительную линию с набольшим максимумом графика зависимости координаты от времени. Для более точного совмещения используйте скроллинг мыши. Значение координаты измерительной линии указывается под ползунком «Измерение координаты» в виде «Координата x(см): *.***».

Повторите измерения для наименьшего по амплитуде максимума графика.

При определении наибольшей и наименьшей амплитуды колебаний маятника также следует обратить внимание на координаты минимумов, взятые по модулю (наиболее близким к максимуму/минимуму амплитуды может оказаться не максимум, а минимум координаты тела). В качестве максимальной амплитуды $A_{\max}$ выберите координату наибольшего по модулю экстремума (максимума/минимума), взятую по модулю. В качестве минимальной амплитуды $A_{\min}$ выберите координату наименьшего по модулю экстремума (максимума/минимума), взятую по модулю.

ЗНАЧЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ И МИНИМАЛЬНОЙ АМПЛИТУД ЗАПИШИТЕ В ТАБЛИЦУ 2.

12. Длину диапазона биений, границы которого были получены в пункте 7, разделите на 35. Полученное значение (с точностью до двух десятичных знаков после запятой) используйте далее в качестве шага изменения частоты внешней силы. Увеличьте использованную ранее частоту внешней силы на величину вычисленного шага, и с помощью ползунка ***«Частота»*** установите это значение. Точное значение установленной частоты указывается над ползунком в виде: «Частота внешней силы (рад/с): *.**».

Повторите опыт, начиная с пункта 10.

13. Изменяя частоту внешней силы с выбранным в пункте 12 шагом, повторяйте опыты, пока не достигнете конца диапазона биений.

Обратите внимание, что при приближении частоты внешней силы к частоте собственных колебаний ($\omega_2 \to \omega_1$) период биений $T_\Delta = 2\pi/\Delta\omega$ увеличивается (т.к. $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \to 0$) и может оказаться больше времени эксперимента. Тогда минимальное значение амплитуды не помещается на графике и не может быть (и не должно быть) измерено.

Максимальное значение амплитуды можно измерить всегда, так как складываемые колебания оба являются косинусами и имеют максимум в начальный момент времени. Поэтому остальные величины (время, количество колебаний, максимальное значение амплитуды) необходимо измерять для каждого значения частоты внешней силы, а минимальную амплитуду – только в том случае, если в процессе эксперимента после уменьшения амплитуды наблюдалось ее увеличение.

14. Для каждого опыта рассчитайте частоту собственных колебаний маятника и амплитуды складываемых колебаний следующим образом.

Амплитуда биений меняется от максимального значения $A_{max} = A_1 + A_2$ до минимального значения $A_{min} = |A_1 - A_2|$, которые выражаются через значения амплитуд складываемых колебаний. Считаем, что $A_1 > A_2$, тогда измерив A_{max} и A_{min}, можно рассчитать амплитуды обоих колебаний:

$$A_1 = \frac{1}{2}(A_{max} + A_{min}) \text{ и } A_2 = \frac{1}{2}(A_{max} - A_{min}).$$

Учитывая точность измерения минимальной и максимальной амплитуды (0,005 см), амплитуды складываемых колебаний необходимо вычислять с точностью четыре десятичных знака после запятой.

Известно, что период колебаний – это время одного колебания.

Если предположить, что тело колеблется с постоянной частотой, то чтобы определить период T надо время колебаний t разделить на количество колебаний N: $T = \frac{t}{N}$.

Частота колебаний Ω обратно пропорциональна периоду $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

Для вычисления частоты Ω в числе π используйте не менее шести значащих цифр: 3,14159.

При биениях колебания происходят с частотой Ω, значение которой связано с частотами складываемых колебаний соотношением:

$$\Omega \approx \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{2}\frac{A_{\min}}{A_{\max}}(\omega_2 - \omega_1) \Rightarrow \omega_1 \approx 2\Omega\frac{A_{\max}}{A_{\max} + A_{\min}} - \omega_2\frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}.$$

При $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \to 0$ (когда A_{min} не может быть измерено) частота колебаний

$$\Omega \approx \overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \Rightarrow \omega_1 \approx 2\Omega - \omega_2 \text{ при } \omega_2 - \omega_1 \to 0.$$

Частота ω_2 внешней силы известна, поэтому используя эти выражения можно определить частоту ω_1 собственных колебаний маятника для каждого из проведенных опытов (и когда A_{min} измерить удалось, и когда не удалось).

Частота колебаний внешней силы ω_2 может меняться с точностью 0,01 рад/с, поэтому частоту собственных колебаний ω_1 необходимо вычислять с точностью три десятичных знака после запятой.

Частоту и критерий биений можно рассчитать следующим образом:

$$|\Delta\omega| = |\omega_2 - \omega_1| \text{ и } \delta = \frac{|\Delta\omega|}{\overline{\omega}}.$$

Для каждого значения частоты ω_2 внешней силы вычислите частоту ω_1 собственных колебаний, амплитуды A_1 и A_2 складываемых колебаний, частоту биений $\Delta\omega$ и критерий биений δ. Обратите внимание! Так как для расчетов ω_1 используются приближенные формулы, справедливые только при малых значениях $\Delta\omega$, в разных опытах получатся разные значения ω_1, не смотря на то, что ω_1 – это частота собственных колебаний пружинного маятника, которая во всех опытах была одинаковой. Определите, для каких из проведенных опытов значение критерия биений удовлетворяет условию $\delta << 1$. Именно для этих опытов формулы, использованные для вычисления ω_1, позволяют получить достоверные результаты.

15. По результатам измерений вычислите среднее значение частоты собственных колебаний и средние значения амплитуд складываемых колебаний.

Для вычисления среднего значения амплитуд складываемых колебаний используйте все вычисленные значения. При этом измеренных значений минимальной амплитуды $A_{\min}$ может оказаться меньше, чем максимальных $A_{\max}$ (см. пункт 13). Поэтому амплитуды A_1 и A_2 рассчитываются только для тех опытов, в которых были измерены и максимальная, и минимальная амплитуды биений.

Для определения среднего значения частоты собственных колебаний используйте только те значения, для которых критерий биений δ меньше 0,1 (меньше 10%) – только при этих условиях можно считать, что колебания происходят с постоянной частотой, и использованные формулы позволяют получить достоверные результаты.

Средние значения амплитуд складываемых колебаний и частоты собственных колебаний должны содержать на одну значащую цифру больше, чем значения, полученные в пункте 14 (т.е. четыре знака после запятой).

Для каждого опыта вычислите разницу между частотой вынуждающей силы и средним значением частоты собственных колебаний маятника. Сравните, как разница между этими частотами изменяется внутри диапазона биений и в диапазоне, для которого $\delta < 0{,}1$.

16. Вычислите относительную и абсолютную погрешность частоты собственных колебаний и амплитуд складываемых колебаний.

17. Вычислите теоретическое значение частоты собственных колебаний пружинного маятника (коэффициент жесткости k пружины и масса m тела): $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Для корректности сравнения экспериментальное и теоретическое значения частоты собственных колебаний должны иметь одинаковое количество значащих цифр. Поэтому теоретическое значение частоты собственных колебаний ω_1 необходимо вычислить с точностью четыре десятичных знака после запятой.

18. Сделайте вывод.

Какого типа движения могут получиться при сложении двух одинаково направленных колебаний? При каком соотношении частот наблюдаются биения? Каковы отличительные особенности биений?

Совпадает ли экспериментальное значение частоты собственных колебаний с теоретическим значением? Что больше, разница между теоретическим и экспериментальным значениями частоты собственных колебаний или абсолютная погрешность?

5. Контрольные вопросы

1. Что понимают под сложением колебаний?

2. Что такое векторная диаграмма? Как с ее помощью можно складывать колебания?
3. Что такое когерентные и некогерентные колебания? Какими уравнениями описывается результат сложения таких колебаний?
4. Что такое биения? Какими уравнениями они описываются? При каких условиях наблюдаются?
5. Как по характеристикам биений определить характеристики складываемых колебаний?
6. Опишите порядок работы.

При создании данной работы авторы опирались на материалы моделирующей лабораторной работы «Сложение колебаний», написанной К.Б. Коротченко, Ю.А. Сивовым в 1996–98 гг.

Таблица 1

Диапазон частот для различных видов результирующего движения

Диапазон	Начало диапазона, рад/с	Конец диапазона, рад/с
Колебания с переменным положением равновесия		
Негармонические колебания		
БИЕНИЯ		
Негармонические колебания		
Колебания с переменным положением равновесия		

Таблица 2

Частоты и амплитуды складываемых колебаний

Частота внешней силы ω_2, рад/с	Количество колебаний N	Время N колебаний t, с	Период колебаний T, с	Частота колебаний Ω, рад/с	Максимальная амплитуда A_{max}, см	Минимальная амплитуда A_{min}, см	Амплитуда собственных колебаний A_1, см	Амплитуда внешней силы A_2, см	Собственная частота маятника ω_1, рад/с	Критерий биений δ	Критерий биений, %
…											
						Средние значения:					

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ. БИЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по изучению моделей
физических процессов и явлений на компьютере
с помощью лабораторной работы № МодК–05
для студентов всех специальностей

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати __.__.2022. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. ____. Уч.-изд.л. ____.
Заказ . Тираж 50 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru