О.Г. Ревинская, *кандидат педагогических наук, профессор РАЕ*
Н.С. Кравченко, *кандидат физико-математических наук, доцент*

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИКИ РЕАКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Предложена методика изучения в курсе общей физики динамики реактивного движения тела в лабораторном практикуме с помощью компьютерной модели.

Ключевые слова: *физические модели, компьютерные модели, учебный физический эксперимент.*

Введение

Построение и изучение моделей различных физических явлений и процессов является эффективным и интересным методом практического применения физической теории. Стабильное сокращение объема лекционных занятий в рамках курса общей физики ведет к постепенному уменьшению спектра обсуждаемых на лекциях моделей. Для компенсации этой тенденции необходимо искать новые формы изучения классических для курса общей физики моделей, а также изучить возможность дополнения традиционно изучаемых моделей новыми, по каким-то причинам ранее не рассматриваемыми в рамках этой дисциплины. При выборе таких моделей важно, чтобы они базировались на материале курса общей физики, расширяли представления студентов о тех или иных ключевых концепциях физики как науки.

Одним из концептуальных законов механики как раздела курса общей физики является закон сохранения импульса замкнутой механической системы. Применение этого закона для описания движения тела переменной массы позволяет раскрыть физическую суть реактивного движения. Однако традиционно при рассмотрении данного вопроса ограничиваются выводом формулы Циолковского, позволяющей рассчитать максимальную скорость, которую можно сообщить телу (ракете), израсходовав известное количество топлива. Эта скорость не зависит от динамики разгона ракеты. Вопрос о том, какое время может понадобиться, чтобы разогнать ракету до желаемой скорости, напротив, напрямую зависит от механизма вытекания топлива и динамики ракеты на этапе разгона.

Механизм подачи топлива и физика его вытекания в ракетостроении очень сложны, но в рамках курса общей физики можно предложить две простые модели, позволяющие изучить и сравнить динамику разгона тела при реактивном движении. Реализация предложенных моделей на компьютере позволит сделать их изучение более эффективным в познавательном плане.

Движение тела переменной массы

Прежде чем перейти к описанию предлагаемых моделей, подчеркнем основные подходы к описанию реактивного движения как движения тела с переменной массой в рамках закона сохранения импульса [1–3].

Для определенности предположим, что в теле массой m имеется полость, заполненная газом, который может вытекать через небольшое отверстие со скоростью $\vec{u}$ относительно тела. Если импульс газа, покинувшего полость, мгновенно передается телу, тогда согласно закону сохранения импульса скорость тела $\vec{v}$ в отсутствии внешних сил изменяется за счет изменения массы тела:

$$m d\vec{v} = -\vec{u} dm \text{ или } m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Это уравнение известно как частный случай ***уравнения Мещерского***. Когда скорость газа относительно тела $\vec{u}$ (скорость истечения газа) постоянна (не зависит от времени), легко получить решение уравнения Мещерского.

Из уравнения видно, что ускорение тела $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ и скорость истечения газа $\vec{u}$ направлены вдоль одной прямой. Следовательно, при реактивном движении без начальной скорости движение тела будет прямолинейным. Поэтому выберем ось координат OX, вдоль направления движения тела (рис. 1). Тогда уравнение движения тела переменной массы в проекциях на ось OX можно записать в виде

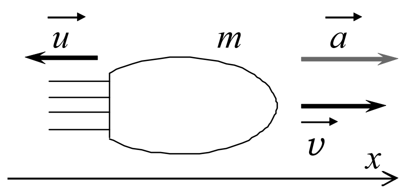


Рис. 1

$$m d\vec{v} = -\vec{u} dm \Rightarrow m dv = -u dm \Rightarrow dv = -u \frac{dm}{m}.$$

При u = const интегрирование полученного выражения позволяет получить

$$v(t) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m(t)},$$

где $v_0 = 0$ – скорость, а m_0 – масса тела в начальный момент времени ($t = 0$).

Полученная формула позволяет рассчитать, какую предельную (максимальную) скорость может развить тело из состояния покоя ($v_0 = 0$), когда из него вытечет весь имеющийся газ. Если в начальный момент времени масса газа внутри тела была равна $m_г$, то максимальная скорость $v_{\max}$, которую сможет развить тело при реактивном движении, равна

$$v_{\max} = u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_г}.$$

Эта формула носит название ***формулы Циолковского***. Из формулы Циолковского легко сделать вывод, что независимо от того, по какому закону уменьшается масса газа, максимальная скорость тела $v_{\max}$ будет одинаковой.

Скорость истечения газа

Рассмотрим, при каких условиях скорость истечения газа можно считать постоянной.

Пусть отделяющееся от тела вещество (идеальный газ) находится в цилиндрическом резервуаре объемом V с площадью поперечного сечения S_0, а площадь отверстия (сопла), через которое газ вытекает из резервуара, равна S (рис. 2). Температура газа T достаточно велика, чтобы давление p и плотность ρ выравнивались мгновенно во всем сосуде после каждого выброса газа и становились одинаковыми во всем резервуаре. Тогда при вытекании газа течение существует только в небольшом слое вблизи сопла (толщиной δ). Будем считать, что линии тока непрерывны. Следовательно, плотность газа, прохо-

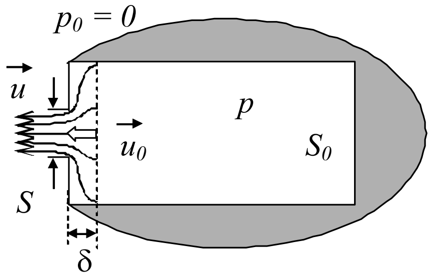


Рис. 2

дящего через сопло, и плотность газа на расстоянии δ от сопла можно считать одинаковой. Тогда для течения в слое толщиной δ можно записать уравнение неразрывности:

$$\rho S u = \rho S_0 u_0 \text{ или } S u = S_0 u_0 ,$$

где u – скорость течения через сопло, а u_0 – скорость течения в δ-слое вблизи сопла.

Если реактивное движение совершается в горизонтальном направлении, то оба сечения S и S_0 находятся на одинаковой высоте h от поверхности Земли. Тогда уравнение Бернулли для этого течения газа можно записать в виде

$$\rho \frac{u^2}{2} + p_0 + \rho g h = \rho \frac{u_0^2}{2} + p + \rho g h ,$$

где p – давление газа внутри резервуара, p_0 – внешнее давление. При движении в вакууме внешнее давление равно нулю $p_0 = 0$.

Следовательно, $\rho \frac{u^2}{2} = \rho \frac{u_0^2}{2} + p$. Учитывая, что $S u = S_0 u_0$, получим

$$u^2 = \frac{2p}{\rho\left(1 - \frac{S^2}{S_0^2}\right)} \quad \text{или} \quad u^2 = \frac{2pV}{m_г\left(1 - \frac{S^2}{S_0^2}\right)} .$$

С помощью уравнения Менделеева – Клайперона для идеального газа $pV = \frac{m_г}{\mu} RT$ можно связать скорость истечения газа u с температурой газа T и его молярной массой μ (R – универсальная газовая постоянная)

$$\frac{pV}{m_г} = \frac{RT}{\mu} \Rightarrow u^2 = \frac{2RT}{\mu\left(1 - \frac{S^2}{S_0^2}\right)} .$$

Таким образом, $$u = \sqrt{\frac{2RT}{\mu\left(1 - \frac{S^2}{S_0^2}\right)}} .$$

Из полученного выражения видно, что если в процессе вытекания газа его температура остается постоянной (T = const), то и скорость истечения газа является константой u = const.

Следовательно, полученная ранее зависимость скорости тела от времени может наблюдаться, например, в случае, если в процессе истечения температура газа внутри тела (в резервуаре) остается постоянной.

В процессе истечения масса газа в резервуаре постоянно уменьшается. Если температура газа остается постоянной, то согласно уравнению Менделеева–Клайперона

$$m_г = \frac{\mu}{RT} pV$$

изменение массы газа может происходить либо за счет изменения давления, либо за счет изменения объема (для упрощения изучаемой модели случай одновременного изменения давления и объема не рассматривается):

1) $m_г(t) = \frac{\mu}{RT} pV(t)$ или $dm = \frac{\mu}{RT} p dV$ (p = const),

2) $m_г(t) = \frac{\mu}{RT} p(t)V$ или $dm = \frac{\mu}{RT} V dp$ (V = const).

Здесь $m_г$ – масса газа внутри тела (масса оставшегося газа). Поэтому изменение массы газа $dm_г$ равно изменению массы всего тела: $dm_г = dm$.

Отсюда вытекают две простые модели истечения газа из полости внутри тела, которые будут формировать различную динамику (временн*у*ю зависимость) разгона тела.

Зависимость массы газа от времени при истечении

Уменьшение массы газа внутри тела (в резервуаре) происходит через сопло площадью S. Газ вытекает с постоянной скоростью u, поэтому за время dt объем газа уменьшится на $Su\,dt$, следовательно, масса газа уменьшится на

$$dm = -\rho \cdot Su\,dt \text{ или (с учетом } \rho = \frac{m_г}{V} = \frac{\mu}{RT} p\text{) } dm = -Su\frac{\mu}{RT} \cdot p\,dt.$$

Рассмотрим, как меняется масса газа, если ***внутри резервуара поддерживается постоянное давление*** p = const. Тогда изменение массы газа, с одной стороны, зависит от объема, а с другой стороны – от времени

$$dm = \frac{\mu}{RT} p\,dV \text{ и } dm = -Su\frac{\mu}{RT} \cdot p\,dt.$$

Приравняв данные выражения и проинтегрировав, получим зависимость объема газа от времени

$$dV = -Su\,dt \Rightarrow V = V_{\max} - uSt$$

или $V = V_{\max}(1-\beta t)$, где $\beta = \dfrac{uS}{V_{\max}}$.

Видно, что объем газа уменьшается линейно по времени от $V_{\max}$ (в начальный момент времени) до нуля. Следовательно, масса газа тоже уменьшается прямо пропорционально времени

$$m_г = m_{\max}(1-\beta t),\ \text{где}\ m_{\max} = \frac{\mu}{RT} pV_{\max}.$$

При таком режиме вытекания весь газ ($m_г = 0$) вытечет из резервуара за время $t_{\max} = 1/\beta$. Спустя время $t_{\max}$ тело разовьет максимальную скорость $\upsilon_{\max}$, предсказанную Циолковским.

Следует заметить, что для соблюдения условия u = const необходимо, чтобы площадь поперечного сечения резервуара S_0 не менялась со временем. Поэтому изменение объема резервуара возможно только за счет уменьшения его длины $L = L_{\max}(1-\beta t)$. Для поддержания постоянного давления в этих условиях достаточно уменьшать длину резервуара равномерно, с постоянной скоростью u.

Рассмотрим, как меняется масса газа, если ***объем резервуара остается постоянным*** при вытекании газа $V = V_{\max} = const$. Тогда изменение массы газа, с одной стороны, зависит от давления, а с другой стороны – от времени

$$dm = \frac{\mu}{RT} V\,dp\ \text{и}\ dm = -Su\frac{\mu}{RT}\cdot p\,dt.$$

Приравняв данные выражения и проинтегрировав, получим зависимость давления газа от времени

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Su}{V}dt\ \text{или}\ \frac{dp}{p} = -\beta\,dt \Rightarrow \ln\frac{p}{p_{\max}} = -\beta t\ \text{или}\ p = p_{\max}e^{-\beta t}.$$

Давление газа уменьшается экспоненциально по времени от $p_{\max}$ в начальный момент времени до нуля. Следовательно, масса газа тоже уменьшается экспоненциально

$$m_г = m_{\max}e^{-\beta t},\ \text{где}\ m_{\max} = \frac{\mu}{RT} p_{\max}V.$$

При таком режиме вытекания за время $1/\beta$ масса газа уменьшится в e раз. Теоретически время разгона стремится к бесконечности. Тело разовьет максимальную скорость $\upsilon_{\max}$, предсказанную Циолковским, но значительно позже по сравнению с вытеканием газа при постоянном давлении.

Кинематические характеристики реактивного движения

Рассмотрим зависимость от времени основных кинематических характеристик реактивного движения (скорости, координаты и ускорения) для полученных временн*ы*х зависимостей массы газа.

Как было показано ранее, при движении из состояния покоя ($\upsilon_0 = 0$) скорость реактивно движущегося тела зависит от массы следующим образом

$$\upsilon(t) = u \ln \frac{m_0}{m(t)}.$$

В рассмотренной модели реактивно движущееся тело состоит не только из непрерывно вытекающего газа, но из некоторой постоянной нагрузки. То есть ***газ выступает в роли топлива, а сама ракета – в роли постоянной нагрузки***. Тогда масса тела m включает не только постоянно уменьшающуюся массу газа $m_г$, но и некоторую неизменную массу ракеты $M_p = const$

$$m(t) = M_p + m_г(t).$$

А скорость ракеты при разгоне

$$\upsilon(t) = u \ln \frac{M_p + m_г(0)}{M_p + m_г(t)}.$$

Ускорение определяется путем дифференцирования скорости, а координата – путем интегрирования по времени

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt}, \; x = x_0 + \int_0^t \upsilon(\tau)\, d\tau .$$

Когда топливо вытекает при постоянном давлении p = const, масса линейно зависит от времени $m_г = m_{\max}(1-\beta t)$. Следовательно, при разгоне из состояния покоя из начала координат ($\upsilon_0 = 0$, $x_0 = 0$)

скорость ракеты $$\upsilon(t) = u \ln \frac{M_p + m_{\max}}{M_p + m_{\max}(1-\beta t)},$$

ускорение ракеты $$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{u\beta\, m_{\max}}{M_p + m_{\max}(1-\beta t)},$$

координата ракеты

$$x(t) = ut - \frac{u}{\beta}\frac{M_p + m_{\max}(1-\beta t)}{m_{\max}}\ln\frac{M_p + m_{\max}}{M_p + m_{\max}(1-\beta t)}.$$

Если ***масса газа много меньше массы ракеты*** $m_{\max} << M_p$, то вторым слагаемым в знаменателе в выражении для ускорения можно пренебречь: $a \approx \frac{u\beta m_{\max}}{M_p}$. Тогда ракета движется с ускорением, близким к постоянному. Известно, что при движении с постоянным ускорением скорость возрастает линейно $v(t) \approx \frac{u\beta m_{\max}}{M_p}t$, а координата – квадратично.

В этих условиях графики скорости и ускорения напоминают линейные зависимости (рис. 3*а*). График координаты отражает ускоренный (квадратичный) характер движения. Ускорение слабо отличается от константы, а движение слабо отличается от равноускоренного.

После вытекания всего газа (топлива) характер движения резко меняется: ускорение обращается в ноль, скорость становится постоянной, а координата возрастает линейно. На рисунке 3*а* изображены графики $a(t)$, $v(t)$, $x(t)$ в течение разгона, равномерное движение после разгона НЕ представлено.

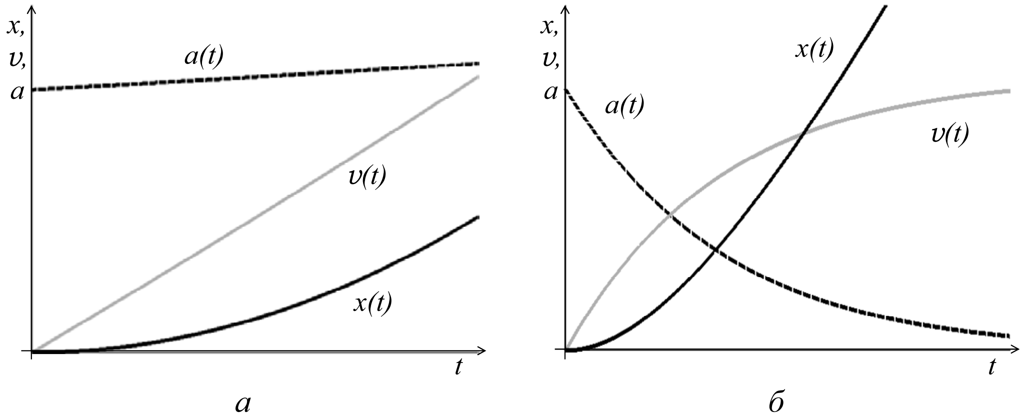


Рис. 3. Графики скорости и ускорения

Когда газ (топливо) вытекает при постоянном объеме *V* = const, масса экспоненциально зависит от времени $m_г = m_{\max}e^{-\beta t}$. Следовательно, при разгоне из состояния покоя и начала координат ($v_0 = 0$, $x_0 = 0$)

скорость ракеты $$v(t) = u\ln\frac{M_p + m_{\max}}{M_p + m_{\max}e^{-\beta t}},$$

ускорение ракеты $$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{u\beta m_{\max}e^{-\beta t}}{M_p+m_{\max}e^{-\beta t}},$$

координата ракеты $$x(t)=u\int_0^t \ln\frac{M_p+m_{\max}}{M_p+m_{\max}e^{-\beta\tau}}d\tau .$$

Если ***масса газа много меньше массы ракеты*** $m_{\max} << M_p$, то вторым слагаемым в знаменателе в выражении для ускорения также можно пренебречь: $a(t)=\frac{u\beta m_{\max}}{M_p}e^{-\beta t}$. Ускорение ракеты постепенно уменьшается до нуля.

Графики скорости и ускорения напоминают экспоненциальные зависимости (рис. 3*б*). Ускорение постоянно уменьшается, скорость стремится к константе, координата – к линейной зависимости. Ускоренное движение плавно переходит в равномерное.

В случае, когда ***массы ракеты и газа сравнимы***, что, как правило, наблюдается в реальности, зависимости ускорения, скорости и координаты определяются теми же аналитическими выражениями, но графически выглядят несколько сложнее (при обоих режимах вытекания). Наибольшие различия наблюдаются в начале разгона. Для упрощения анализа этот случай, выходящий за рамки курса общей физики, не рассматривается.

На основе изложенных моделей на кафедре теоретической и экспериментальной физики Томского политехнического университета разработана компьютерная лабораторная работа «Реактивное движение» (рис. 4), целью которой является изучение динамики реактивного разгона тела («ракеты») некоторой массы из состояния покоя за счет вытекания газа из имеющейся внутри «ракеты» цилиндрической полости. Компьютерная модель позволяет фиксировать время прохождения «ракетой» одинаковых отрезков пути. Для этого на пути движения «ракеты» равномерно расположены «датчики», которые фиксируют время, когда «ракета» достигнет данной точки. По-существу, эмпирически снимается зависимость координаты от времени при различных режимах вытекания топлива. По полученным данным студенты самостоятельно восстанавливают зависимость скорости и ускорения от времени, учитывая, что $v(t)=\frac{dx(t)}{dt}\Rightarrow v(t)\approx\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$, а $a(t)=\frac{dv(t)}{dt}\Rightarrow a(t)\approx\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}$.

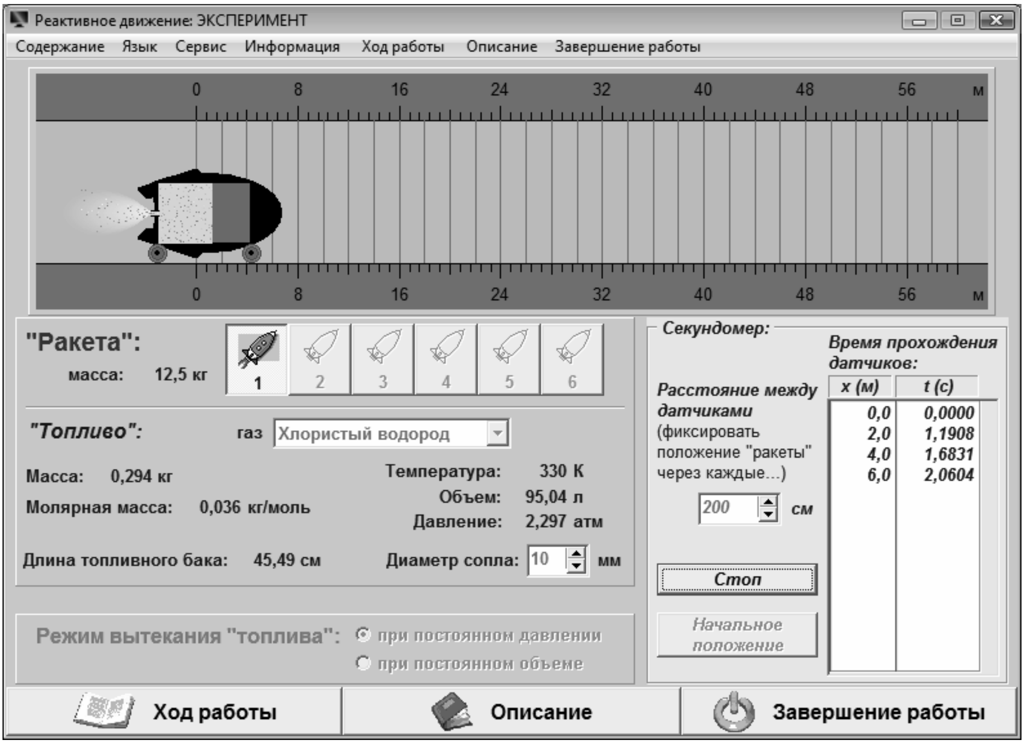


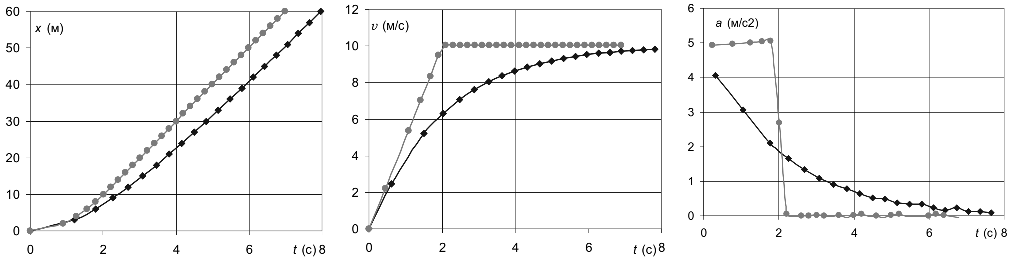
Рис. 4. Компьютерная лабораторная работа

Вытекание «топлива» при постоянном давлении достигается за счет равномерного уменьшения длины топливного бака, в котором находится газ. Когда длина (объем) топливного бака не изменяется, вытекание «топлива» происходит при постоянном объеме. Давление газа при этом постепенно уменьшается. Эксперименты проводятся с «ракетами» разной массы M_p и различными диаметрами сопла S.

Когда разгон «ракеты» происходит при постоянном давлении, анализируя полученные зависимости (качественно и количественно), можно определить время разгона $t_{\max}$ и скорость вытекания «топлива» $u = \dfrac{V_{\max}}{t_{\max} S}$.

На рис. 5 приведены примеры зависимостей от времени ускорения, скорости и координаты «ракеты», полученные при различных режимах вытекания «топлива».

Зависимость координаты от времени | Зависимость скорости от времени | Зависимость ускорения от времени



• – p = const; ♦ – V = const

Рис. 5. Зависимости скорости, ускорения и координат ракеты при различных режимах вытекания топлива

Заключение

Таким образом, эксперименты, выполняемые студентами в рамках данной лабораторной работы, позволяют выяснить, как динамика реактивного движения зависит от диаметра сопла «ракеты», ее массы, а также от режима вытекания топлива. Анализируя полученные зависимости, легко сделать вывод, что при постоянном давлении внутри топливного бака скорость «ракеты» увеличивается равномерно и быстрее достигает максимума. Пока «топливо» есть в баке, ускорение «ракеты» незначительно возрастает – движение близко к равноускоренному. По графикам скорости и ускорения при p = const легко определить время, в течение которого «ракета» разгоняется. С этого момента скорость перестает изменяться, а ускорение обращается в ноль. При V = const ускорение стремится к нулю экспоненциально.

Несмотря на упрощенный характер описанной модели, сравнение режимов вытекания позволяет сделать вывод, что предпочтительным является реактивный разгон, при котором топливо «вытекает» из ракеты при постоянном давлении, хотя в реальных условиях многие использованные в модели предположения не выполняются либо иначе реализуются технически.

Реализация предложенных моделей на компьютере позволяет сделать их изучение наглядным и динамичным. С помощью компьютерной модели студенты получают первоначальные экспериментальные данные (зависимость координаты тела от времени). Остальные расчеты и анализ они выполняют самостоятельно. Следует отметить, что необходимость численного восстановления временных зависимостей скорости и ускорения тела стимулирует их к практическому использованию своих навыков работы с электронными таблицами.

Использование данной лабораторной работы в курсе общей физики позволяет не только на доступном студентам младших курсов уровне глубже изучить реактивное движение, но и расширить их представления о кинематических законах, встречающихся в науке и технике; раскрыть возможности компьютерного моделирования при изучении физических явлений и процессов. Данная работа является продолжением комплекса лабораторных работ по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере [4], разрабатываемого на кафедре теоретической и экспериментальной физики Томского политехнического университета.

Литература

1. Бондарев Б.В., Калашников Н.П., Спирин Г.Г. Курс общей физики. В 3 кн. Кн.1. Механика. М.: Высш. шк., 2003.
2. Китель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. М.: Наука, 1971.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005.
4. Кравченко Н.С., Ревинская О.Г. Комплекс лабораторных работ по изучению физических моделей на компьютере в курсе общей физики // Материалы X конференции стран Содружества «Современный физический практикум», Астрахань, 16–19 сентября 2008 г. М.: Изд. дом МФО, 2008.

Revinskaya O.G., *PhD in Pedagogy, Professor of RAE*
Kravchenko N.S., *PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor*

METHODS OF STUDYING OF DYNAMICS OF REACTION MOTION IN A COURSE OF GENERAL PHYSICS THROUGH COMPUTER SIMULATION

The technique of studying in a course of the general physics of dynamics of jet movement of a body in a laboratory practical work by means of computer model is offered.

Key words: *physical models, computer models, educational physical experiment.*