

О. Г. Ревинская, Н. С. Кравченко

МОДЕЛЬ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ ВЫТЕКАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ МАЛОГО ОТВЕРСТИЯ И ЕЕ РЕАЛИЗАЦИЯ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Предложена модель лабораторного исследования вытекания идеальной несжимаемой жидкости из малого отверстия в сосуде, закрытом подвижным поршнем. Наличие поршня в сосуде позволяет выявить зависимость скорости истечения жидкости и дальности полета струи от диаметра сосуда и плотности жидкости. На основе рассмотренной методики исследования модели можно определить плотность изучаемой жидкости и концентрацию примесей в ней. Предложенная дидактическая модель реализована в виде компьютерной работы для использования в лабораторном практикуме по курсу общей физики.

Ключевые слова: физическая модель, идеальная несжимаемая жидкость, вытекание жидкости, компьютерная лабораторная работа, натурная лабораторная работа.

Введение

Модель идеальной (невязкой, нетеплопроводящей) несжимаемой жидкости является одной из фундаментальных моделей курса общей физики. Динамика движения идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести описывается уравнением Бернулли. Традиционно в университетском курсе общей физики уравнение Бернулли применяют в основном для определения скорости истечения жидкости из отверстия в открытом сосуде [1–3]. Динамика вытекания жидкости из сосуда, накрытого подвижным поршнем, также может быть описана в рамках курса общей физики уравнением Бернулли. В этом случае скорость истечения и дальность полета струи жидкости определяется не только высотой столба жидкости в сосуде над отверстием, но и плотностью жидкости, а также площадью поперечного сечения сосуда и массой поршня.

С методической точки зрения расширение области применения уравнения Бернулли для описания вытекания идеальной несжимаемой жидкости из закрытого подвижным поршнем сосуда позволяет студентам проанализировать различия в динамике данного процесса, наблюдаемые для разных жидкостей.

Физическая модель

Рассмотрим цилиндрический сосуд с площадью поперечного сечения S_1 , наполненный идеальной несжимаемой жидкостью до высоты h_1 (рис. 1). В боковой стенке сосуда на высоте h_2 от дна сосуда имеется малое отверстие площадью S_2 . Жидкость накрыта поршнем массой M , который может свободно перемещаться в сосуде без трения.

Согласно уравнению Бернулли при ламинарном течении суммарные давления, испытываемые жидкостью в сечении S_1 на высоте h_1 и в сечении S_2 на высоте h_2 , одинаковы:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Если течение жидкости в сосуде считать ламинарным, из уравнения неразрывности легко получить: $v_1 = v_2 \cdot S_2/S_1$.

Статическое давление p_2 для открытого отверстия равно атмосферному p_0 : $p_2 = p_0$. Статическое давление p_1 больше атмосферного p_0 за счет давления Mg/S_1 , создаваемого силой тяжести поршня: $p_1 = p_0 + Mg/S_1$. Тогда из уравнения Бернулли можно получить выражение:

$$\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) \frac{\rho v_2^2}{2} = \rho g(h_1 - h_2) + \frac{Mg}{S_1}.$$

Если $S_2 \ll S_1$, выражение $1 - S_2^2/S_1^2 \approx 1$. Тогда скорость v_2 истечения жидкости из отверстия определяется следующим выражением

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) + \frac{2Mg}{\rho S_1} \quad \text{или} \quad v_2 = \sqrt{2gh + \frac{2Mg}{\rho S_1}},$$

где $h = h_1 - h_2$.

Если поршень убрать ($M = 0$), то получается формула Торричелли $v_2 = \sqrt{2gh}$ (скорость вытекания одинакова для различных жидкостей).

По мере вытекания жидкости высота h столба жидкости над отверстием уменьшается. То есть скорость v_2 истечения жидкости из отверстия изменяется со временем.

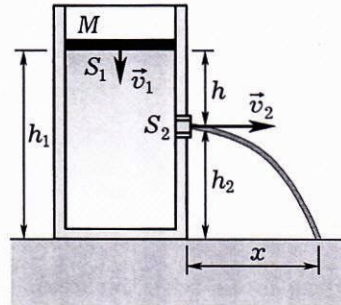


Рис. 1. Вытекание жидкости из сосуда, закрытого подвижным поршнем

За промежуток времени dt объем жидкости в сосуде уменьшается на величину $dV = -S_1 dh$. В то же время через отверстие вытекает жидкость объемом $S_2 v_2 dt$. Следовательно, $-S_1 dh = S_2 v_2 dt$. Подставив выражение для скорости v_2 , получим дифференциальное уравнение

$$S_1 dh = -S_2 \sqrt{2g} \sqrt{h + \frac{M}{\rho S_1}} \cdot dt.$$

Разделив переменные и проинтегрировав по времени от 0 до t , получим

$$\sqrt{h(t) + \frac{M}{\rho S_1}} = \sqrt{h(0) + \frac{M}{\rho S_1}} - \frac{S_2}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t,$$

где $h(0) = h_1 - h_2$ — высота столба жидкости над отверстием в начальный момент времени, $h(t)$ — высота столба жидкости в момент времени t .

Подставив полученное выражение в формулу для скорости v_2 , получим зависимость скорости истечения жидкости из малого отверстия от времени

$$v_2 = \sqrt{2g} \sqrt{h(0) + \frac{M}{\rho S_1}} - \frac{S_2}{S_1} g t \quad \text{или} \quad v_2 = v_0 - at,$$

где

$$v_0 = \sqrt{2g} \sqrt{h(0) + \frac{M}{\rho S_1}}, \quad a = \frac{S_2}{S_1} g.$$

Жидкость, покидая сосуд, имеет горизонтально направленную скорость. Если площадь поперечного сечения S_2 отверстия мала, и сопротивлением воздуха можно пренебречь, струю жидкости, покинувшую сосуд, можно описать как совокупность независимых материальных точек, вылетающих из отверстия с горизонтально направленной скоростью v_2 . Под действием силы тяжести струя жидкости будет двигаться по параболе, а время $t_{\text{пад}}$ от момента выхода жидкости из отверстия до падения на горизонтальную поверхность — равно $t_{\text{пад}} = \sqrt{2h_2/g}$. Тогда расстояние $x = v_2 t_{\text{пад}}$ от сосуда до точки падения (дальность падения) струи жидкости зависит от времени следующим образом:

$$x = 2 \sqrt{h(0)h_2 + \frac{Mh_2}{\rho S_1}} - \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2h_2g} \cdot t \quad \text{или} \quad x = x_{\text{max}} - ut,$$

где

$$x_{\max} = 2\sqrt{h(0)h_2 + \frac{Mh_2}{\rho S_1}}, \quad u = \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2h_2g}.$$

Расстояние до точки падения струи жидкости на горизонтальную поверхность со временем уменьшается. Максимальное по горизонтали расстояние x_{\max} , на которое удаляется струя жидкости от сосуда, тем больше, чем больше масса поршня, выше расположено отверстие, меньше плотность жидкости.

Методика экспериментальных измерений

В процессе эксперимента жидкость, вытекая из сосуда, падает на горизонтальную поверхность, оставляя след, длину которого можно измерить. Если жидкость вытекала в течение времени Δt , то длина следа Δx определяется как разность между максимальной x_{\max} и минимальной $x_{\min} = x_{\max} - u\Delta t$ дальностью падения струи

$$\Delta x = x_{\max} - x_{\min} = u\Delta t = \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2h_2g} \cdot \Delta t.$$

Зависимость расстояния x до точки падения струи жидкости на горизонтальную поверхность от времени не учитывает толщину струи (движение материальной точки). Она описывает положения центра струи. Если струя не скручивается, а жидкость не растекается по горизонтальной поверхности, то наблюдаемая длина следа ΔX будет больше теоретической Δx на диаметр отверстия $2R_2$ (рис. 2)

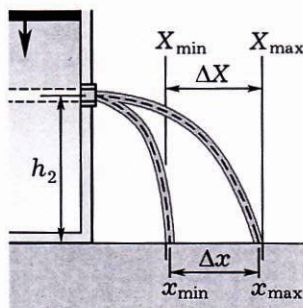


Рис. 2. Дальность падения струи жидкости

$$\Delta X = \Delta x + 2R_2 = \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2h_2g} \cdot \Delta t + 2R_2.$$

Выразив площади отверстия S_2 и поперечного сечения сосуда S_1 через их радиусы R_2 и R_1 ($S_2 = \pi R_2^2$, $S_1 = \pi R_1^2$), получим квадратное уравнение, с помощью которого можно определить радиус отверстия

$$R_2^2 \frac{\Delta t}{R_1^2} \sqrt{2h_2g} + 2R_2 - \Delta X = 0.$$

Уравнение имеет два корня, один из которых отрицательный. Положительный корень имеет вид $R_2 = \sqrt{z}(\sqrt{z + \Delta X} - \sqrt{z})$, где

$z = \frac{R_1^2}{\Delta t \sqrt{2h_2g}}$. Тогда радиус отверстия равен

$$R_2 = R_1 \left(\sqrt{\left(\frac{R_1}{\Delta t \sqrt{2h_2g}} \right)^2 + \frac{\Delta X}{\Delta t \sqrt{2h_2g}}} - \frac{R_1}{\Delta t \sqrt{2h_2g}} \right).$$

Таким образом, зная время вытекания жидкости Δt и длину следа ΔX , оставленного струей жидкости на горизонтальной поверхности, можно определить площадь отверстия S_2 .

Максимальная дальность падения струи жидкости зависит от массы поршня

$$x_{\max} = \sqrt{4h(0)h_2 + \frac{4h_2}{\rho S_1} M}.$$

Отсюда видно, что функция $x_{\max}^2(M)$ зависимости квадрата максимальной дальности падения струи от массы поршня линейна. Тангенс угла наклона $\operatorname{tg} \alpha$ графика этой функции зависит от плотности жидкости $\operatorname{tg} \alpha = 4h_2/\rho S_1$. Это позволяет определить плотность жидкости. При построении графика функции $x_{\max}^2(M)$ следует помнить, что струя жидкости имеет толщину. Поэтому экспериментальное значение максимальной дальности X_{\max} падения струи жидкости будет больше теоретического x_{\max} на радиус отверстия R_2 (рис. 2): $x_{\max} = X_{\max} - R_2$.

Если исследуемая жидкость содержит примеси (например, красители), увеличивающие ее плотность, можно определить концентрацию примесей $\eta = (\rho - \rho_0)/\rho$, где ρ_0 — плотность чистой жидкости, без примесей, значение которой можно найти в физических справочниках.

Компьютерная модель экспериментальной установки и результаты исследования

На основании изложенной физической модели и методики экспериментальных измерений авторами разработана компьютерная лабораторная работа «Вытекание жидкости из малого отверстия» (рис. 3).

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется процесс вытекания идеальной несжимаемой жидкости из цилиндрического сосуда через круглое отверстие малого диаметра (ламинарное течение). Сопротивление окружающей среды отсутствует. Движение жидкости вне сосуда моделируется как движение совокупности независимых материальных точек. Жидкость

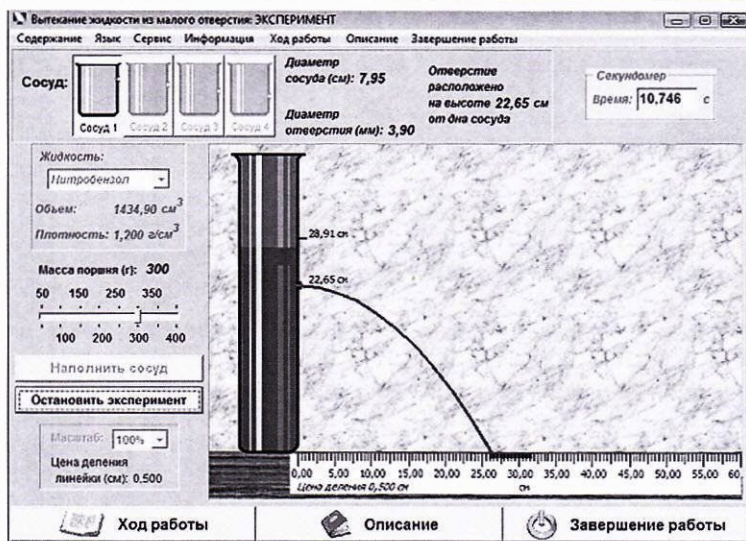


Рис. 3. Компьютерная лабораторная работа «Вытекание жидкости из малого отверстия»

накрыта поршнем, способным двигаться в сосуде без трения. Для опытов можно использовать поршень массой от 50 до 400 г.

На горизонтальной поверхности перед сосудом расположена линейка для определения дальности падения струи жидкости. Для повышения наглядности эксперимента в жидкость добавлен краситель, повышающий ее плотность на 3–7%. Покинув сосуд, струя жидкости падает на линейку и впитывается в нее, не растекаясь.

Для определения времени вытекания жидкости в работе используется синхронизированный секундомер. Для повышения точности измерения дальности падения струи жидкости масштаб отображения области эксперимента можно увеличивать от 100 до 500%. При этом цена деления линейки автоматически изменяется от 0,5 до 0,1 см.

Для выбранной массы поршня студентам рекомендуется провести опыт, измерить время вытекания жидкости, максимальную и минимальную дальность падения струи жидкости с максимально доступной в работе точностью (в масштабе 500%). Опыты повторяют с поршнями различной массы. По полученным данным студенты вычисляют длину следа ΔX в каждом опыте, площадь S_2 и радиус R_2 отверстия. По результатам всех опытов строят график зависимости квадрата максимальной дальности падения x_{\max}^2 струи жидкости от массы M поршня (рис. 4), по тангенсу угла на-

клона которого рассчитывают плотность и концентрацию примесей в жидкости. При указанных условиях погрешность определения площади отверстия и концентрации примесей (красителя) не превышают 1–2%.

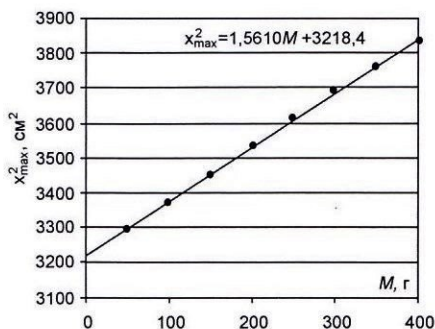


Рис. 4. Зависимость квадрата максимальной дальности падения x_{\max}^2 струи жидкости от массы M поршня

Компьютерная лабораторная работа «Вытекание жидкости из малого отверстия» позволяет выполнять исследования для жидкостей, обладающих различной плотностью, например, для бензина, воды, нитробензола и т. д. На рис. 4 приведена полученная при выполнении данной работы зависимость квадрата максимальной дальности падения струи жидкости от массы поршня, полученная при исследовании хлороформа. Для проведения исследований в работе используются цилиндрические сосуды различных диаметров с отверстиями, расположенными на различных высотах. Диаметры отверстий в различных сосудах также разные (3,9–6,2 мм). Информация об истинном значении диаметра отверстия приводится в рабочем окне лабораторной работы (рис. 3). Эта информация позволяет студентам не только оценить относительную погрешность рассчитанной на основе экспериментальных данных площади отверстия, но и предоставляет им возможность самостоятельно контролировать корректность обработки экспериментальных данных. Освоение методов такого самоконтроля является особенно актуальным на начальных этапах экспериментальных исследований, так как развивает у студентов ответственное отношение к результатам своей деятельности.

Компьютерная работа «Вытекание жидкости из малого отверстия» входит в комплекс лабораторных работ по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере, который разрабатывается на кафедре теоретической и экспериментальной физики Национального исследовательского Томского политехнического университета с 2002 г. В настоящее время комплекс включает 27 лабораторных работ.

Заключение

Изучение динамики вытекания идеальной несжимаемой жидкости из малого отверстия в сосуде, закрытом подвижным поршнем, с помощью компьютерной модели в лабораторном практикуме по общей физике позволяет студентам проанализировать при различных условиях изменение дальности падения струи жидкости со временем, а также времени вытекания жидкости. На скорость истечения жидкости влияет не только высота столба жидкости в сосуде над отверстием (формула Торричелли), но и плотность жидкости, площадь поперечного сечения сосуда и масса поршня.

Используемая в работе модель струи жидкости как совокупности независимых, не взаимодействующих друг с другом материальных точек позволяет использовать знания студентов, полученные ими в школьном курсе физики при изучении движения материальной точки в поле силы тяжести. Опора на частично знакомый материал при освоении новой для студентов младших курсов деятельности по изучению физических моделей на компьютере способствует их адаптации в вузовской системе обучения.

Таким образом, выполнение разработанной авторами лабораторной работы «Вытекание жидкости из малого отверстия» способствует углублению знаний студентов по курсу общей физики, а также расширению опыта использования теоретических моделей для исследования физических явлений и процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бычков А. А. Вытекание жидкости из отверстия в стенке сосуда // Учебная физика. — 2004. — № 5. — С. 23–26.
2. Майер Р. В. Вытекание жидкости из сосуда // Учебная физика. — 2000. — № 6. — С. 33–37.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. В 5 т. Т. 1. Механика. — М.: Физматлит, 2005. — 560 с.

Национальный исследовательский
Томский политехнический
университет

Поступила в редакцию 14.01.14.