

Из приведенных данных видно, что результаты, полученные с помощью графического дифференцирования и при использовании *MathCAD*, находятся в достаточно удовлетворительном согласии.

#### Основные выводы

1. При температуре катода  $T \sim 3000$  К термоэлектроны представляют невырожденный газ и подчиняются классической статистике Максвелла.

2. Полученная экспериментальная кривая термоэлектронов по энергиям достаточно хорошо совпадает с теоретической, и ее максимальное значение  $E_{\max} = 15$  эВ — наиболее вероятное значение энергии.

3. Функция распределения термоэлектронов по скоростям находится в хорошем согласии с результатами расчета скорости электронов по формулам, полученным из теоретических представлений.

4. Расчет ширины функции распределения термоэлектронов по энергии указывает на тот факт, что доля относительно медленных и относительно быстрых электронов мала и ее величина составляет порядка нескольких электронвольт:  $\Delta E \approx 4$  эВ,  $E = E_{\max} \pm \Delta E$ ,  $E = 15 \pm 2$  эВ.

5. Результаты графического и аналитического вычисления производной  $dI_a/dU_3$  находятся в достаточно удовлетворительном состоянии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фейнман Р. Ф., Лейтон Р. Б., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 7. Физика сплошных сред. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 528 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики в пяти книгах. Книга 5. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. — М.: ООО Издательство «АСТ», 2002. — С. 200–208.
3. Гуртов В. А., Осауленко Р. Н. Физика твердого тела для инженеров. — М.: Техносфера, 2007. — С. 318–319.
4. Румер Ю. В., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М., 1977. — 198 с.
5. <http://umk.sinp.msu.ru>
6. Дьяконов В. *MathCAD 8/2000*. Специальный справочник. — СПб.: Издательский дом «Питер», 2001. — 591 с.

Рязанский государственный университет

Поступила в редакцию 11.08.09.

Н. С. Кравченко, О. Г. Ревинская

## ИЗУЧЕНИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ НА КОМПЬЮТЕРЕ

В работе изучают динамику падения сферического тела без начальной скорости в средах различной вязкости с использованием программного продукта, разработанного на кафедре теоретической и экспериментальной физики (ТиЭФ) Томского политехнического университета. По полученным в работе данным по методу наименьших квадратов можно восстановить аналитический вид уравнения движения и судить о характере движения тела в средах с различной вязкостью (равномерное, равноускоренное, с переменным ускорением). Работа позволяет студентам лучше разобраться в вопросе о влиянии сопротивления среды на динамику движения тела.

Во многих задачах по механике одним из необходимых условий является учет сопротивления среды, в которой движется тело. Школьный курс физики ограничивается изучением случая, когда сопротивлением среды (воздуха) можно пренебречь. Тогда, например, вертикальное падение тела с некоторой высоты будет равноускоренным. Движение тела в среде большой вязкости, когда сила сопротивления среды быстро уравнивает силу тяжести, и тело начинает двигаться равномерно, относится к вузовскому курсу общей физики. Для формирования целостной физической картины мира у студентов в курсе общей физики необходимо также уделить внимание и движению в средах со средней вязкостью, когда ускорение тела постепенно уменьшается, тем более, что этот случай широко распространен в природе и более других приближен к повседневному жизненному опыту студентов.

Чтобы раскрыть влияние сопротивления среды на движение тела, рассмотрим падение тела без начальной скорости с некоторой высоты. При движении с малыми скоростями (движение начинается из состояния покоя) движение слоев жидкости относительно тела можно считать ламинарным. Поэтому будем считать, что сила сопротивления среды пропорциональна скорости движения тела, и для тела сферической формы (радиуса  $R$ ) может быть записана в виде:  $\vec{F}_c = -6\pi R\eta \cdot \vec{v}$ .

Кроме силы сопротивления среды на тело действует также сила тяжести и сила Архимеда. Тогда согласно второму закону

Ньютона движение тела описывается дифференциальным уравнением [1]

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_C$$

или в скалярном виде

$$m \frac{dv}{dt} = mg - V\rho g - 6\pi R\eta v,$$

где  $m$  — масса тела,  $V$  — его объем,  $\rho$  — плотность,  $\eta$  — вязкость среды.

Решение этого уравнения можно записать в виде:

$$x(t) = Ut - U\tau(1 - e^{-t/\tau}), \quad v(t) = U(1 - e^{-t/\tau}), \quad a(t) = g_{ж}e^{-t/\tau},$$

где

$$\tau = \frac{2\rho_T R^2}{9\eta}, \quad U = g_{ж}\tau, \quad g_{ж} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_T}\right)g, \quad \rho_T \text{ — плотность тела.}$$

Ускорение тела со временем уменьшается. Величину  $\tau$ , имеющую размерность времени, можно интерпретировать как период установления — время, за которое ускорение тела уменьшается в  $e$  раз. Через несколько периодов установления ускорение тела можно считать равным нулю. Но в зависимости от вязкости среды период установления может быть сравним со временем падения (длительностью эксперимента), много меньше или много больше времени падения. Если длительность проводимого эксперимента много больше периода установления, то движение можно интерпретировать как равномерное. Такое движение можно наблюдать в тяжелых жидкостях (с большим коэффициентом вязкости). Если период установления значительно превосходит время эксперимента, то в течение всего времени падения силы, действующие на тело, еще не скомпенсированы, и динамика движения тела близка к динамике равноускоренного движения. Такое движение можно наблюдать в газах. В легких жидкостях (со средним коэффициентом вязкости) рассматриваемые времена соизмеримы, и тело движется с уменьшающимся ускорением.

Анализируя аналитическое выражение для ускорения по отношению к вязкости среды, легко получить два крайних случая: равноускоренное и равномерное движение.

Если вязкость среды мала  $\eta \rightarrow 0$ , период установления  $\tau \rightarrow \infty$ , то ускорение тела не зависит от времени (равноускоренное движение). Обычно среды с малой вязкостью имеют и малую плотность, поэтому ускорение тела будет равно ускорению свободного падения  $g$ .

Если вязкость среды велика  $\eta \rightarrow \infty$ , период установления очень мал  $\tau \rightarrow 0$ , тогда ускорение тела быстро обращается в нуль (равномерное движение).

Аналогичный анализ выражения для координаты позволяет получить знакомые уравнения движения для равномерного и равноускоренного движения. В промежуточной ситуации при движении в средах со средней вязкостью ускорение тела уменьшается со временем. То есть, имеем движение с переменным ускорением. При этом все три вида движения записываются с помощью разных аналитических зависимостей:

$$x(t) = \frac{gt^2}{2}, \quad x(t) = Ut - U\tau \quad \text{и} \quad x(t) = Ut - U\tau(1 - e^{-t/\tau}).$$

Это затрудняет их сравнение между собой. Чтобы облегчить такой анализ, в общем выражении для координаты разложим экспоненту в ряд

$$\begin{aligned} x(t) &= Ut - U\tau \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2!\tau^2} - \frac{t^3}{3!\tau^3} + \dots\right)\right) = \\ &= \frac{Ut^2}{2\tau} - \frac{Ut^3}{3!\tau^2} + \frac{Ut^4}{4!\tau^3} - \dots = g_{ж} \frac{t^2}{2} - g_{ж} \frac{t^3}{3!\tau} + g_{ж} \frac{t^4}{4!\tau^2} - \dots \end{aligned}$$

Покажем, что, учитывая вязкость среды, в приведенном разложении необходимо учитывать разное количество членов.

Если вязкость мала  $\eta \rightarrow 0$ , величина  $\tau^{-1}$  также является бесконечно малой, поэтому можно ограничиться тремя первыми членами разложения

$$x(t) \approx Ut - U\tau \left(\frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2\tau^2}\right) = \frac{Ut^2}{2\tau} = \frac{g_{ж}t^2}{2} \implies x(t) \approx \frac{g_{ж}t^2}{2}.$$

Получили знакомое выражение для равноускоренного движения.

При средней вязкости  $\eta$  величину  $\tau^{-1}$  нельзя считать бесконечно малой, следовательно, трех первых членов в разложении недостаточно. Необходимо учитывать члены, зависящие от времени в более высоких степенях

$$x(t) = g_{ж} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!\tau} + \frac{t^4}{4!\tau^2} - \dots\right).$$

Тогда уравнение движения можно представить в виде

$$x(t) = g_{ж} \left(1 - \frac{2t}{3!\tau} + \frac{2t^2}{4!\tau^2} - \dots\right) \frac{t^2}{2}$$

и говорить о движении с переменным ускорением.

Очевидно, чем больше вязкость, тем больший вклад по сравнению с единицей вносят старшие степени отношения  $t/\tau$ , и большее количество слагаемых необходимо учитывать в разложении.

При большой вязкости  $\eta \rightarrow \infty$ , ряд должен содержать беско-

нечное число слагаемых. А уравнение движения примет вид:

$$x(t) = Ut - U\tau(1 - e^{-t/\tau}) \approx Ut - U\tau.$$

Такой анализ позволяет поставить задачу для экспериментального исследования в средах с различной вязкостью: по имеющейся экспериментальной зависимости координаты тела от времени восстановить аналитический вид уравнения движения и определить характер движения (равноускоренное, равномерное, с переменным ускорением). Для восстановления аналитической зависимости можно использовать метод наименьших квадратов [2].

По имеющимся значениям координат тела  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ , зафиксированным в моменты времени  $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$ , по методу наименьших квадратов можно предложить студентам восстановить уравнение движения в одном из трех видов: для движения в среде с большой вязкостью —

$$x = x_0 + Ut + \alpha \frac{t^2}{2};$$

для движения в среде с малой вязкостью, например, в газе —

$$x = g_{ж} \frac{t^2}{2} + \alpha \frac{t^3}{3!};$$

для движения в среде со средней вязкостью —

$$x = g_{ж} \frac{t^2}{2} + \alpha_1 \frac{t^3}{3!} + \alpha \frac{t^4}{4!}.$$

Константы  $x_0, U, \alpha$  и  $\alpha_1$  рассчитываются численно по методу наименьших квадратов. Если коэффициент  $\alpha$  много меньше других числовых коэффициентов в уравнении движения, то слагаемым с этим коэффициентом можно пренебречь. Тогда в первом случае имеем равномерное движение, во втором — равноускоренное, а в третьем — для описания движения с переменным ускорением достаточно ограничиться четырьмя членами в разложении экспоненты в ряд. В последнем случае, если оба коэффициента ( $\alpha$  и  $\alpha_1$ ) отличны от нуля, сопротивление среды нельзя считать пренебрежимо малым.

Такая постановка задачи была реализована нами в лабораторной работе «Движение тела в вязкой среде». В этой работе студенты изучают движение сферического тела в вязкой среде на компьютерной модели, которая обеспечивает ламинарный характер сопротивления среды при больших, малых и средних вязкостях. В работе (рис. 1) фиксируется время прохождения телом датчиков (меток), расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. По полученным значениям координат и времени восстанавливают аналитический вид уравнения движения.

Программный продукт моделирует движение тела в заданных условиях и обеспечивает студентов средствами измерения координат и времени. Рассчитать константы, входящие в уравнение движения, студенты должны самостоятельно. Необходимые для этого формулы (по методу наименьших квадратов) приведены в методических указаниях по выполнению работы. Анализируя соотношение входящих в уравнение констант, студенты выясняют, достаточно ли учтено слагаемых при разложении экспоненты в ряд для корректного описания уравнения движения. Чем больше слагаемых необходимо учитывать, тем о большем влиянии сопротивления среды на движение тела можно говорить.

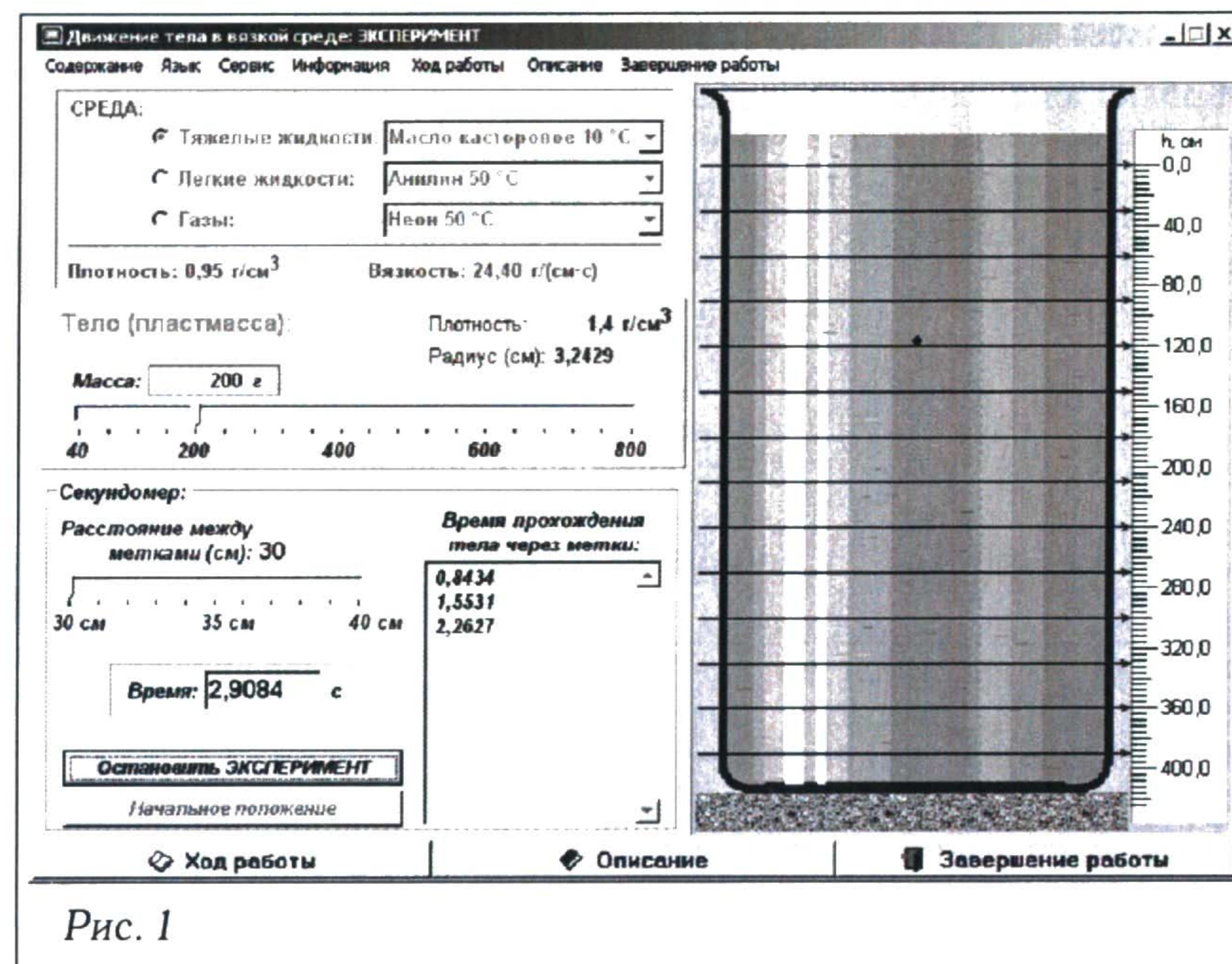


Рис. 1

На рис. 2 приведены примеры полученных при выполнении работы графических и аналитических зависимостей (*a* — при большой вязкости, *b* — при малой вязкости, *в* — при средней вязкости). В случае *a* движение становится равномерным за доли секунды. В случае *b* неквадратичная зависимость координаты от времени пренебрежимо мала, движение можно считать равноускоренным. В случае *в* видно, что и третья, и четвертая степени в зависимости координаты от времени дают существенный вклад в уравнение движения. Так как на характер движения влияет не только вязкость среды, а также масса тела, то в работе аналогичные исследования проводятся для сферических тел с различными массами. Так, например, из проведенных в ра-

боте расчетов студенты видят, что при движении в газах легких тел кубической зависимостью от времени в уравнении движения пренебречь нельзя, а для тяжелых (как на рис. 2 б) — можно.

Выполнение описанной лабораторной работы по изучению модели движения сферического тела в вязкой среде позволяет подробно изучить влияние сопротивления среды на движение тел различной массы. А общность подхода к изучению движения в различных условиях расширяет представления студентов о методах исследования, применяемых в физике.

Данная работа выполняется студентами в рамках лабораторного практикума по курсу общей физики, содержательно и методологически дополняя имеющийся на кафедре ТиЭФ Томского политехнического университета набор натуральных лабораторных работ. Данная работа входит в комплекс лабораторных работ по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере, который разрабатывается на кафедре с 2002 г. В настоящее время комплекс включает 20 лабораторных работ.

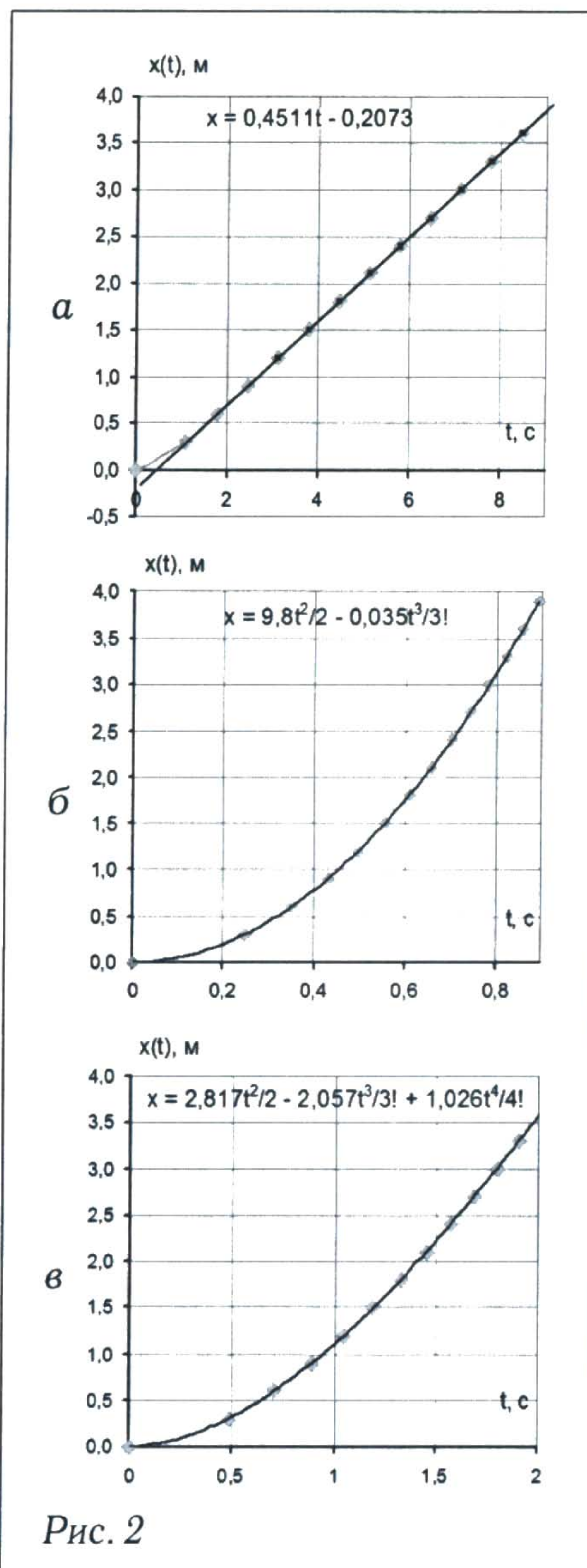


Рис. 2

## ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелков С. П. Механика. — М.: Наука, 1975. — 560 с.
2. Заварькин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы. — М.: Просвещение, 1990. — 176 с.

А. С. Богатин, А. Л. Старикова  
В. Н. Богатина, С. А. Ковригина

## ЭЛЕКТРОННЫЕ ТРЕНАЖЕРЫ ПО ФИЗИКЕ

Созданы электронные тренажеры по 20 лабораторным работам физического практикума для студентов естественнонаучных специальностей и направлений.

Электронные тренажеры предназначены для домашней подготовки студентов к занятиям в натурной физической лаборатории. Тренажер позволяет познакомиться с теорией раздела курса, которому посвящена работа, с устройством лабораторной установки, выполнить необходимый эксперимент в виртуальном пространстве, провести обработку результатов, оценить погрешности их определения. Пройдя подготовку на тренажере, студент чувствует себя в натурной лаборатории гораздо уверенней и быстро справляется с поставленными заданиями. Познакомимся с некоторыми из этих тренажеров.

Внешний вид тренажера по геометрической оптике приведен рис. 1. Тренажер позволяет, фокусируя изображение предмета на экране и проводя необходимые измерения расстояний и (или) размеров изображений, определять фокусное расстояние и оптическую силу используемой линзы. При этом могут быть использованы различные методы расчета фокусного расстояния, в том числе метод Бесселя. Программа работы тренажера позволяет оценивать результаты измерений с учетом погрешностей их измерения, что дает возможность производить симуляцию расчета погрешностей определения фокусного расстояния. Тренажер позволяет также знакомиться с аберрациями линз, в том числе с астигматизмом косых пучков.

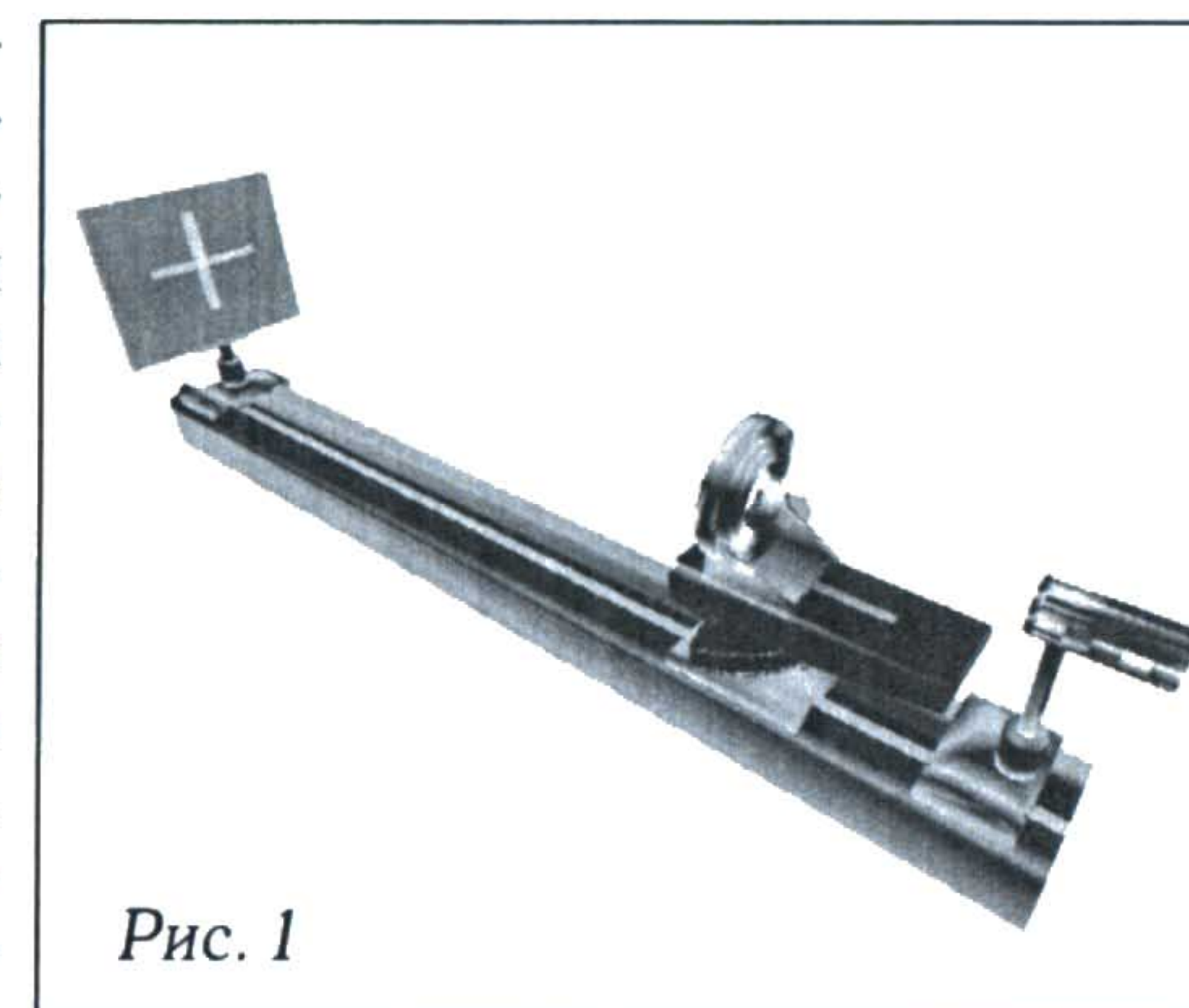


Рис. 1