

Н. С. Кравченко, О. Г. Ревинская

ИЗУЧЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КОМПЬЮТЕРНЫХ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ

Центральное взаимодействие относится к фундаментальным вопросам, оказывающим влияние на формирование современной физической картины мира обучающихся. Фундаментальная подготовка по курсу общей физики в вузе не может ограничиваться качественным изучением этого важного вопроса. Трудности количественного рассмотрения центрального взаимодействия связаны со сложным, мало знакомым студентам математическим аппаратом представления дифференциальных уравнений и их решений в полярных координатах. Дополнение теоретического изучения вопросов центрального взаимодействия выполнением лабораторных работ, моделирующих кулоновское и гравитационное взаимодействия, позволяет наполнить образным содержанием абстрактные физические и математические понятия. Кроме того, макроскопический характер гравитационного и микроскопический характер кулоновского взаимодействия при детальном исследовании позволяют после выполнения работ вернуться к обобщению изученного теоретического материала, опираясь на личный опыт студентов. В результате методическая концепция изучения центрального взаимодействия может быть построена в направлении от обобщенного теоретического описания через детальное самостоятельное исследование во внешней предметной деятельности к индивидуальному обобщению на качественно новом уровне.

Взаимодействие двух тел является одним из базовых вопросов курса общей физики. Методологически важно, что взаимодействие двух тел сводится к задаче о движении одного тела в некотором силовом поле. Одним из широко распространенных считается центральное поле, в котором сила, действующая на тело, зависит только от расстояния до силового центра и направлена радиально.

Если массы взаимодействующих тел существенно отличаются, то более тяжелое тело движется значительно медленнее легкого. Тогда тяжелое тело можно рассматривать в качестве неподвижного источника поля.

Центральное взаимодействие

При центральном взаимодействии сила, действующая на тело массой M , в общем виде записывается как

$$\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{где} \quad F_r(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

(α — константа взаимодействия). Тогда движение тела массой M в этом поле описывается вторым законом Ньютона:

$$M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Система двух взаимодействующих тел является замкнутой, поэтому выполняется закон сохранения энергии

$$E = \frac{Mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r} = \text{const.}$$

Учитывая центральный характер взаимодействия, момент силы равен нулю, движение является плоским, а момент импульса сохраняется:

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{P}] = M [\vec{r} \vec{v}] = \text{const.}$$

Поэтому для описания центрального взаимодействия удобно выбрать полярную систему координат (r и φ).

В полярной системе координат второй закон Ньютона и законы сохранения примут вид [1, 2]:

$$M\ddot{r} = \frac{L^2}{Mr^3} + \frac{\alpha}{r^2}, \quad E = \frac{M}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r} = \text{const}, \quad L = Mr^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Выбрав замену переменных $r(t) = 1/\xi(\varphi)$, уравнение динамики можно свести к виду:

$$M\ddot{r} = \frac{L^2}{Mr^3} + \frac{\alpha}{r^2}, \quad \text{следовательно} \quad \frac{d^2 \xi}{d\varphi^2} + \left(\xi + \frac{\alpha M}{L^2} \right) = 0$$

или

$$\frac{d^2 \chi}{d\varphi^2} + \chi = 0, \quad \text{где} \quad \chi(\varphi) = \xi(\varphi) + \frac{\alpha M}{L^2}.$$

Решением данного уравнения является гармоническая зависимость χ от φ с амплитудой A и некоторой начальной фазой φ_{\min} :

$$\chi = A \cos(\varphi_{\min} - \varphi) \quad \text{или} \quad r = \frac{p}{\varepsilon \cos(\varphi_{\min} - \varphi) - 1}.$$

Полученное уравнение движения тела в полярных координатах представляет собой уравнение конических сечений и имеет три характерных параметра: фокальный параметр

$$p = \frac{L^2}{\alpha M},$$

эксцентриситет

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 M} E}$$

и φ_{\min} — угол в полярных координатах, при котором тело приближается к источнику поля на минимальное расстояние.

Характер конического сечения (траектории) зависит от значения эксцентриситета: круг ($\varepsilon = 0$), эллипс ($\varepsilon < 1$), парабола ($\varepsilon = 1$) или гипербола ($\varepsilon > 1$).

Поскольку параметры траектории p , ϵ существенно зависят от константы взаимодействия α , различные виды центрального взаимодействия имеют индивидуальные пространственные, энергетические и прочие физические характеристики. Так кулоновское взаимодействие является микроскопическим и характеризуется энергиями порядка 10^{-17} кг · м²/с². Гравитационное взаимодействие напротив является макроскопическим и характеризуется энергиями порядка 10^{10} кг · м²/с². Кроме того, при гравитационном взаимодействии наблюдается только притяжение, а при кулоновском — возможно как притяжение, так и отталкивание. Поэтому, несмотря на общность теоретического описания, практическое изучение этих двух видов физического взаимодействия необходимо проводить отдельно.

Кулоновское взаимодействие

При кулоновском взаимодействии $\alpha = kq_1q_2$. Константа α может быть как положительной, так и отрицательной в соответствии со знаками зарядов q_1 и q_2 взаимодействующих тел. Следовательно, полная энергия системы E также может быть положительной или отрицательной. Однако если движение начинается издалека (с расстояния, значительно превышающего характерный радиус взаимодействия), кинетическая энергия $Mv^2/2$ по модулю значительно превышает потенциальную $|\alpha/r|$, тогда полная энергия E будет положительной. Из выражения для эксцентриситета видно, что при положительных энергиях эксцентриситет всегда больше единицы, траекторией движения тела является гипербола.

Таким образом, если кулоновское взаимодействие изучается в условиях, когда тело приближается к силовому центру извне, с большого расстояния (например, одна заряженная частица бомбардируется другими), всегда траектория тела будет представлять из себя гиперболу. Эта ситуация хорошо подходит для описания опыта Резерфорда, когда тяжелые ядра бомбардировались легкими альфа-частицами. Эта же ситуация воспроизведена нами в компьютерной лабораторной работе «Движение заряженной частицы в кулоновском поле» (рис. 1).

В этой работе, измеряя положение налетающей альфа-частицы в различные моменты времени, студенты вычисляют геометрические параметры (p, ϵ) траектории и физические характеристики (E, L, α) взаимодействия при различных начальных положениях и скоростях налетающей частицы. Эти исследования позволяют изучить зависимость параметров траектории от начального состояния частицы, а также от физических интегралов движения.

Так как все траектории в экспериментах являются незамкнутыми, можно ввести понятие угла рассеяния и изучить его связь с перечисленными выше параметрами.

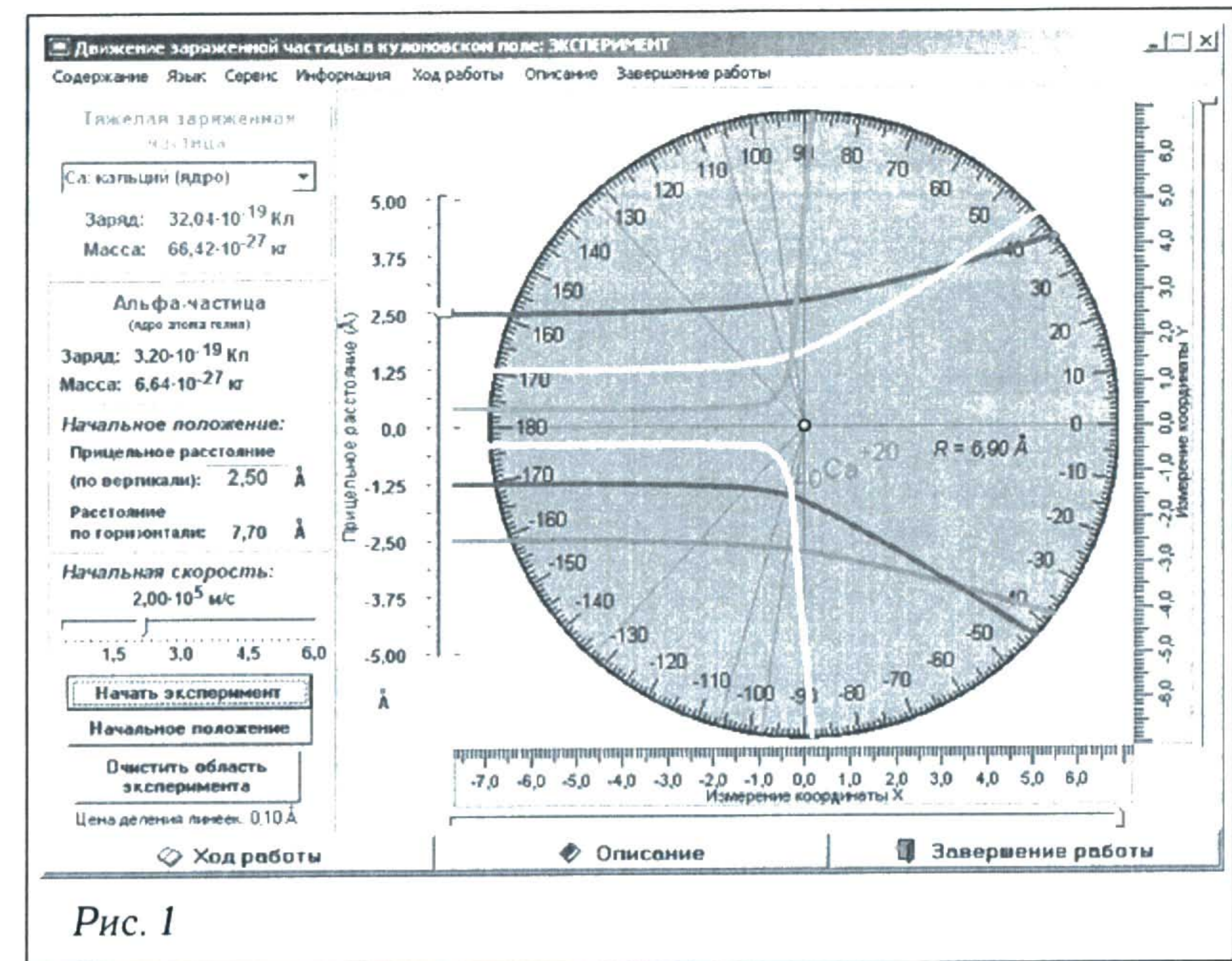


Рис. 1

Анализ кулоновского взаимодействия в данной работе завершается сравнением полной энергии системы E с эффективной потенциальной энергией:

$$\Phi(r) = \frac{L^2}{2Mr^2} + \frac{\alpha}{r}.$$

На собственном опыте студенты могут убедиться, что в проведенных исследованиях полная и эффективная энергии пересекаются только в одной точке, соответствующей точке минимального приближения альфа-частицы к источнику поля. Это позволяет конкретизировать и закрепить изученный материал.

Гравитационное взаимодействие

При гравитационном взаимодействии $\alpha = -GMm$, константа α всегда отрицательна (m — масса тела, являющегося источником поля).

Если тело массой M начинает движение вблизи источника поля, то его кинетическая энергия $Mv^2/2$ может оказаться меньше модуля потенциальной $|\alpha/r|$. Тогда полная энергия системы E будет отрицательной. Следовательно, возможно движение по кругу ($\epsilon = 0$) или эллипсу ($\epsilon < 1$) — движение по замкнутым траекториям. Кроме того, возможны и движения по незамкнутым траекториям при больших значениях энергии — гиперболам, параболам.

Закономерности движения тела в гравитационном поле изложены в законах Кеплера. Изучению этих законов посвящена компьютерная лабораторная работа «Движение инертного тела в гравитационном поле» (рис. 2).

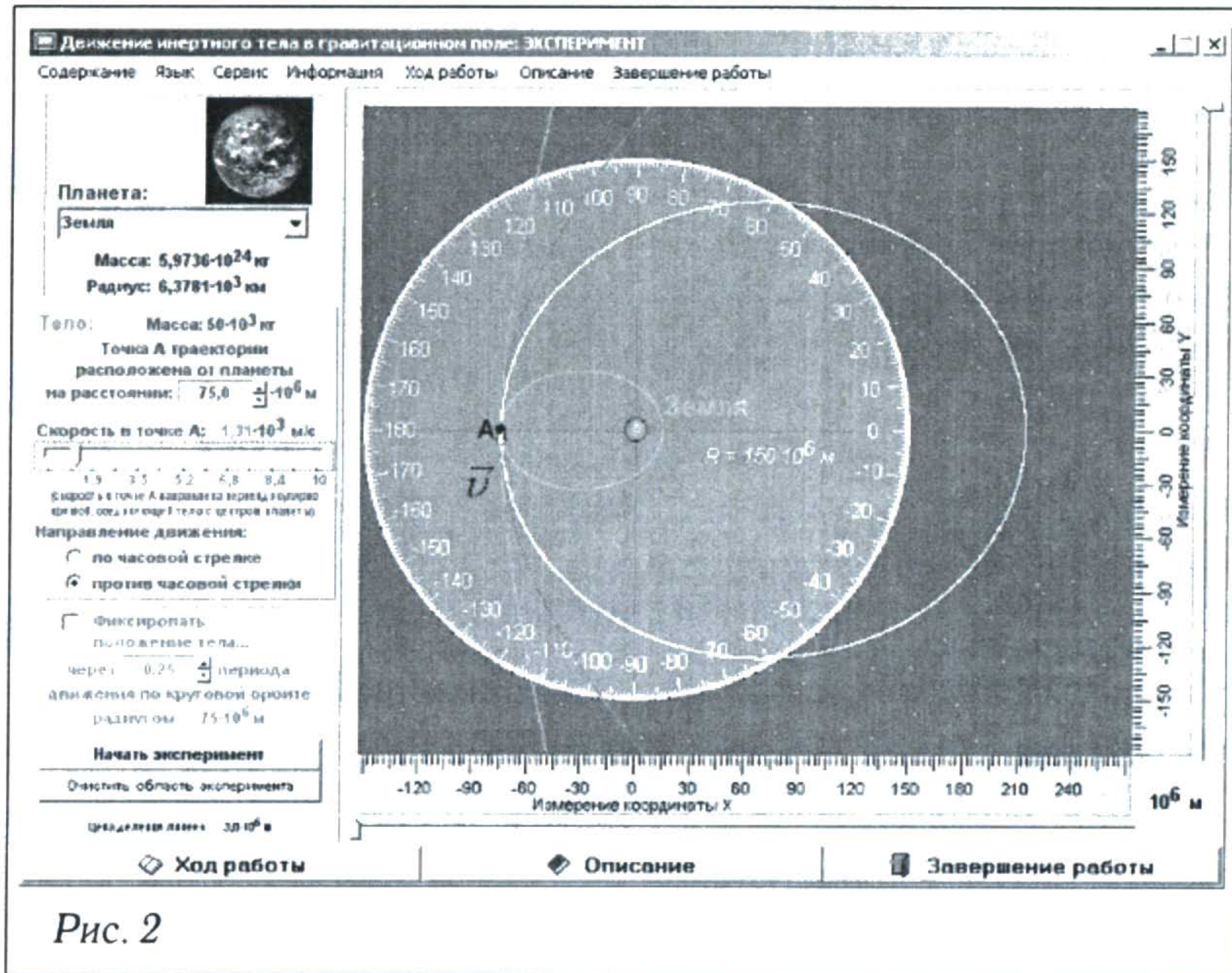


Рис. 2

В соответствии с количеством законов Кеплера выполнение работы разделено на три этапа. На первом этапе необходимо убедиться, что тела в гравитационном поле движутся по коническим сечениям, в одном из фокусов которого находится источник поля (первый закон Кеплера). Студенты должны определить, при каких условиях тело будет двигаться вокруг некоторой планеты по замкнутой траектории, не сталкиваясь с ней.

Второй закон Кеплера иллюстрирует изменение угловой скорости тела при центральном взаимодействии: при движении вокруг планеты радиус-вектор тела заметает за равные промежутки времени равные площади. На этом этапе, фиксируя положение тела через равные промежутки времени, можно рассчитать соответствующие площади и убедиться, что чем ближе тело к источнику поля, тем быстрее оно вращается в соответствии с законом сохранения момента импульса.

Третий закон Кеплера устанавливает связь между большой полуосью эллипса, по которому движется тело, и периодом его вращения. Этот закон в свою очередь иллюстрирует сохранение энергии замкнутой системы, величина которой и определяет размер эл-

липса. Поэтому третий этап работы посвящен экспериментальному выявлению взаимосвязи длины большой полуоси эллиптической траектории тела с полной энергией изучаемой системы.

В результате в работе не только изучается взаимосвязь геометрических параметров (ρ , ϵ) с физическими характеристиками (E , L , α) системы, но и практически иллюстрируются проявления законов сохранения в природе.

Заключение

За счет характерных размеров и энергий рассмотренных взаимодействий в условиях учебных лабораторий не удастся создать условия, необходимые для их детального изучения. Так, например, для наблюдения за спутниками, движущимися вокруг Земли, необходимо кроме технически сложного оборудования располагать значительным временем для наблюдения. При этом студент не может оказывать влияние на пространственные и энергетические характеристики спутника.

Использование компьютерных моделей для изучения центрального взаимодействия позволило расширить возможности студентов при исследовании особенностей как кулоновского, так и гравитационного взаимодействий. Анализ изучаемой системы строится на данных, полученных самим обучаемым, а не на отчужденном материале, почерпнутом из литературных источников.

В данном вопросе повышение наглядности исследований — не самоцель. Оно является методически обоснованным, так как повышает достоверность исследований, делает полученные студентами выводы более личными и предметными. За счет этого появляется возможность повторного обобщения материала уже на основании личного опыта каждого студента. Таким образом, учебный процесс от обобщенного математического описания центрального взаимодействия через личный опыт исследования конкретных моделей подталкивает студента к естественному обобщению изученного материала на новом для него уровне, формируя целостное восприятие вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарев Б. В., Калашников Н. П., Спирин Г. Г. Курс общей физики. В 3 кн. Кн.1. Механика. — М.: Высш. шк., 2003. — 352 с.
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. — М.: Наука, 1971. — 480 с.

Томский политехнический университет

Поступила в редакцию 22.01.08.