

## Виртуальная лабораторная работа «Момент инерции твёрдого тела»

Кравченко Н.С., Ревинская О.Г.

Томский политехнический университет, кафедра теоретической и экспериментальной физики

В работе предложен метод определения момента инерции тел различной формы. Момент инерции твёрдого тела зависит от положения оси вращения относительно центра инерции тела. Согласно теореме Штейнера момент инерции тела будет минимален, если тело вращается относительно оси, проходящей через его центр инерции. В отсутствие трения тело, начав вращаться, сохраняет постоянную угловую скорость, которая зависит от момента инерции тела. Измерив угловую скорость вращения тела при различных положениях оси вращения можно построить пространственную зависимость момента инерции тела. Полученная двумерная поверхность будет иметь минимум в точке, совпадающей с центром инерции тела. Таким образом можно экспериментально определить положения центра инерции для тел различной формы.

Экспериментальное изучение вращательного движения твёрдого тела вообще и момента инерции в частности требует сложного экспериментального оборудования, например, как описано в [1]. Нами разработана виртуальная лабораторная работа «Момент инерции твёрдого тела», в которой изучается момент инерции тела при произвольном положении оси вращения относительно центра инерции. В работе моделируется следующая схема опыта.

Твёрдое тело массой  $m_T$  способно вращаться вокруг некоторой оси  $OO'$ , расположенной перпендикулярно плоскости рисунка (рис. 1, сила тяжести также направлена перпендикулярно рисунку и скомпенсирована). Одна грань тела является прямой. Перпендикулярно этой грани летит шарик массой  $m$  с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . После упругого удара шарик отлетает в противоположном направлении со скоростью  $\vec{u}$ , а покоившееся до этого тело начинает равномерно вращаться вокруг оси  $OO'$  без трения.

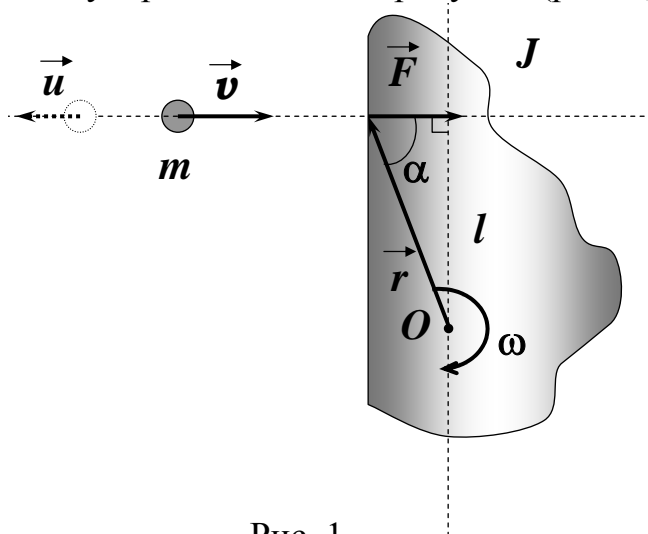


Рис. 1

Для того чтобы определить величину угловой скорости  $\omega$ , с которой будет вращаться тело, запишем уравнение динамики  $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$ . Вращение возникает только за счет удара шарика. При этом за время удара  $\Delta t$  импульс шарика изменился на величину  $\Delta\vec{P}$ . Согласно второму закону Ньютона сила  $\vec{F}$ , действующая на шарик, равна  $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ . Шарик ударяется о тело в точке, расположенной на расстоянии  $r$  от оси вращения. Момент силы  $\vec{M}$ , действующей на тело, равен  $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \left[ \vec{r}, \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \right]$ . За время удара угловая скорость тела изменилась на величину  $\Delta\omega$ , и угловое ускорение тела во время взаимодействия с шариком равно  $\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ . Тогда уравнение динамики примет вид:

$$\left[ \vec{r}, \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \right] = J \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \text{ или } [\vec{r}, \Delta\vec{P}] = J\Delta\vec{\omega}.$$

В проекции на ось  $OO'$  полученное уравнение примет вид

$$r\Delta P \sin \alpha = J\Delta\omega.$$

Учтем, что  $r \sin \alpha = l$  – плечо силы, а в начальный момент тело покоилось ( $\omega_0 = 0$ ), поэтому  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega$ . Следовательно, полученное уравнение можно записать в виде:  $l\Delta P = J\omega$ .

Скорость шарика до столкновения равна  $\vec{v}$ , а после столкновения  $\vec{u}$ . Изменение импульса шарика равно  $\Delta P = mu - (-mv) = mu + mv$ .

$$l(mu + mv) = J\omega \text{ или } mu = \frac{J\omega}{l} - mv.$$

Чтобы определить скорость шарика после столкновения, воспользуемся законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \text{ или } mu^2 = mv^2 - J\omega^2.$$

Исключив скорость шарика после столкновения и приведя подобные, получим уравнение

$$J\omega + m\omega l^2 = 2mvl.$$

Зная угловую скорость вращения тела  $\omega$ , массу  $m$  и скорость шарика  $v$ , а также расстояние  $l$  от оси вращения до линии движения шарика, можно определить момент инерции  $J$  тела:

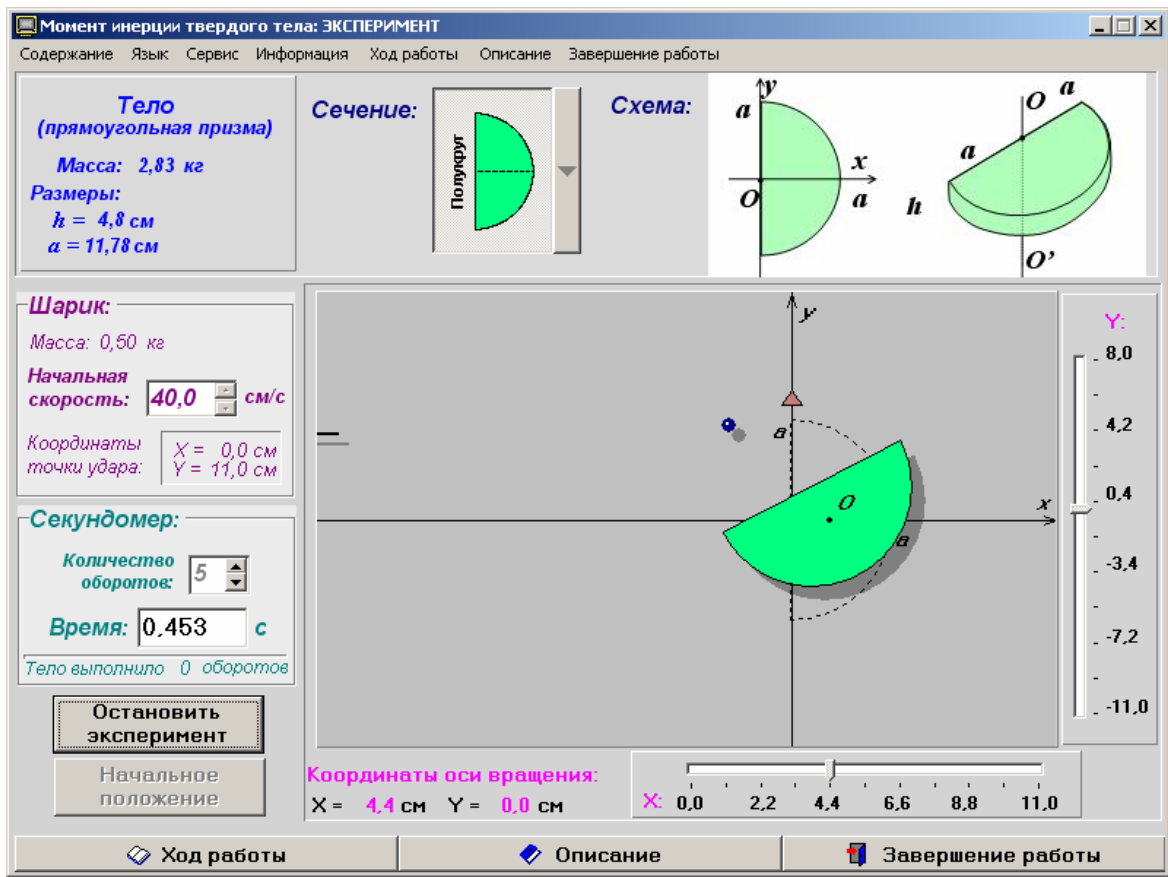


Рис. 2.

$$J = ml \frac{2v - \omega l}{\omega}.$$

После удара тело начинает вращаться равномерно, что позволяет измерить время фиксированного числа оборотов и определить период вращения, а, следовательно, и угловую скорость вращения. В работе предусмотрена возможность произвольного перемещения оси вращения, что позволяет экспериментально изучать момент инерции тела относительно произвольной оси вращения.

Внешний вид экспериментальной части виртуальной работы представлен на рисунке 2.

Согласно теореме Штейнера момент инерции тела  $J$  относительно любой оси вращения равен моменту его инерции  $J_C$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы  $m_T$  тела на квадрат расстояния  $R_C$  между осями.

$$J = J_C + m_T R_C^2.$$

Если оси, вокруг которых происходит вращение, параллельны, то зависимость момента инерции от положения оси вращения представля-

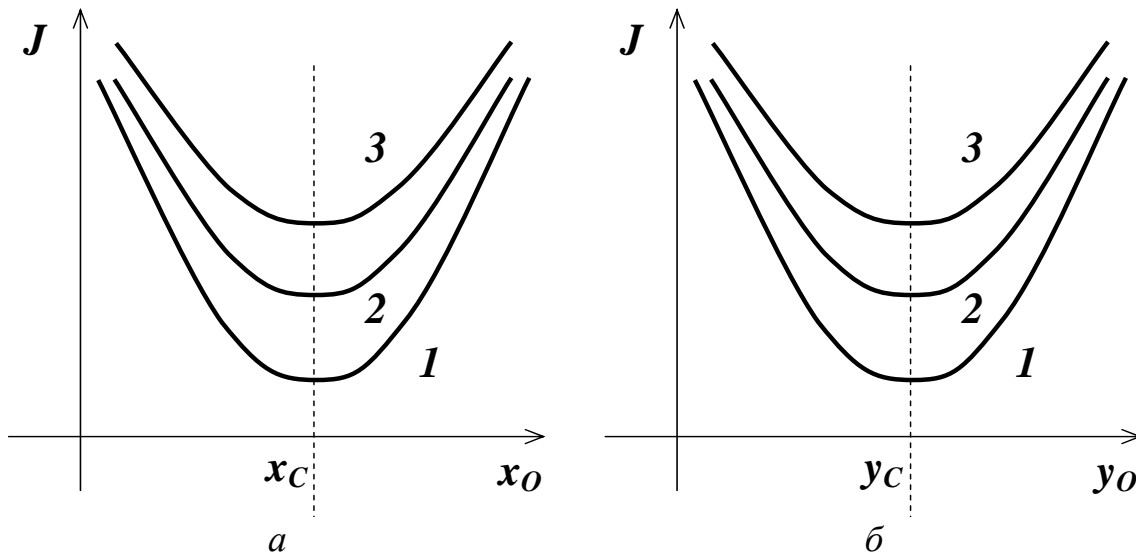


Рис. 3.

ет собой параболоид вращения с минимумом в точке, совпадающей с центром инерции [2]. На рисунке 3 приведены зависимости момента инерции тела: а) от X-координаты оси вращения  $x_O$  при трех фиксированных значениях Y-координаты оси вращения  $y_O$ ; б) от Y-координаты оси вращения  $y_O$  при трех фиксированных значениях X-координаты оси вращения  $x_O$ . Кривые (1) соответствуют более близким к центру инерции значениям фиксированных координат  $x_O$  и  $y_O$ , соответственно. Кривые (3), наоборот, соответствуют самым удаленным от центра инерции значениям фиксированных координат. Семейства кривых на рисунках 3а и 3б имеют минимумы в одних и тех же точках, соответствующих координатам центра инерции тела  $x_C$  и  $y_C$ .

Таким образом, выполнение виртуальной работы позволяет не только изучить теорему Штейнера, но и экспериментально определить положение центра инерции твердого тела. Для сравнения необходимо вычислить координаты центра инерции и момент инерции тела с помощью интегрального исчисления. Сочетание экспериментальных измерений с теоретическими расчетами придает данной работе вид законченного исследования.

Данный метод применим для изучения тел любой формы. Необходимо только, чтобы шарик летел перпендикулярно грани тела. Однако, для облегчения теоретических выкладок все тела, с которыми можно выполнить эксперимент в данной виртуальной работе, имеют форму прямоугольной призмы с различными поперечными сечениями. Сечения тел, представленных в работе, по форме представляют: прямоугольник, квадрат, прямоугольный треугольник, равнобедренный тре-

угольник, параллелограмм, ромб и полукруг. При теоретическом изучении темы «Момент инерции твердого тела» обычно рассматривают из перечисленных выше только параллелепипед и половину диска. Теоретическому расчету положения центра инерции, как правило, вообще внимания не уделяется. Поэтому данная работа значительно обогащает теоретические знания студентов по этой теме, способствуя ее углубленному изучению [3, 4].

1. Семенов М.В., Якута А.А. Автоматизированная демонстрационная установка «Стол на воздушной подушке» и лекционные эксперименты на ее основе // Физическое образование в вузах. – 2004. – Т. 10, № 1. – С. 55-70.
2. Кингсепп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курс общей физики: Учебн. в 2 т. Т. 1. – М.: Физматлит, 2001, – 560 с.
3. Богданов О.В., Ревинская О.Г., Филимонов С.С. Компьютерные лабораторные работы как один из способов развития интереса к изучению физики // Материалы X Всероссийской научно-практической конференции «Инновационные процессы в высшей школе», Краснодар, 23-26 сентября 2004 г. – Краснодар, 2004. – С. 98-99.
4. Кравченко Н.С., Ревинская О.Г. Роль виртуального лабораторного практикума в углубленном изучении некоторых физических явлений // Материалы XVI Международной конференции «Применение новых технологий в образовании», Троицк, 28-29 июня 2005 г. – Тровант, 2005. – С. 353-355.