

При проведении экспериментальных исследований приготовленный раствор ($C = 1-5\%$) заливается в ячейку, а в другую половину — растворитель до одинакового уровня в манометрических трубках. Экспериментатор, включив миллиамперметр и компьютер, в режиме реального времени наблюдает процесс переноса растворителя через мембрану в раствор по разности уровней в манометрических трубках (по шкале 5, градуированной в миллиметрах) и по графику концентрационно-временной зависимости, отображаемому на мониторе компьютера. При завершении процесса диффузии растворителя разность уровней в манометрических трубках не изменяется и как подтверждение: вхождение концентрационно-временной зависимости в насыщение. Определив концентрацию и плотность раствора, по формуле $P = CRT$ (закон Вант-Гоффа) вычисляют осмотическое давление и сравнивают с показаниями манометра, определяя давление по формуле $P = \rho gh$, где ρ — плотность раствора, g — ускорение свободного падения, h — разность уровней в манометрических трубках.

В заключение подчеркнем, что после проведения эксперимента лабораторная установка не требует трудоемкой подготовки для следующей группы студентов. Необходимо лишь отобрать шприцем часть раствора до уровня в манометрической трубке растворителя, напротив, при обедненной концентрации можно добавить часть готового раствора.

Тамбовский государственный
технический университет

Поступила в редакцию 09.02.10.

О. Г. Ревинская, Н. С. Кравченко
МОДЕЛЬ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО
ИЗУЧЕНИЯ РАБОТЫ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ
НА ПРИМЕРЕ РАБОТЫ СИЛЫ ТРЕНИЯ
И ЕЕ РЕАЛИЗАЦИЯ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Предложена модель экспериментального исследования особенностей работы силы трения как неконсервативной силы. Учитывая связь модуля силы трения с силой реакции опоры, показано, что подтвердить зависимость работы неконсервативной силы не только от длины, но и от формы траектории, по которой движется тело, возможно, если исследовать движение тела по поверхности, угол наклона по отношению к горизонту которой различен в разных точках. Несмотря на то, что аналитические расчеты работы силы трения в этом случае оказываются, как правило, весьма затруднительными, использование закона сохранения энергии для определения работы силы трения позволяет детально изучить работу этой силы на участках траектории различной длины и формы. Выполнение подобных исследований в рамках лабораторного практикума способствует формированию более глубоких представлений о различиях между консервативными и неконсервативными силами в физике.

Ключевые слова: физическая модель, консервативные и неконсервативные силы, работа силы трения, закон сохранения энергии, компьютерная лабораторная работа.

Введение

Понятие консервативной и неконсервативной силы относится к числу фундаментальных понятий курса общей физики, которое вводится в механике. Принципиальное отличие консервативных и неконсервативных сил состоит в характере работы, совершаемой ими при движении тела по некоторому участку траектории. В отличие от консервативных сил, работа которых зависит только от начального и конечного положения тела, работа неконсервативных сил зависит также от длины и формы траектории, по которой движется тело. Одним из типовых примеров неконсервативных сил является сила трения. Рассчитав работу силы трения при движении тела по плоскости (наклонной или горизонтальной), традиционно делают вывод, что работа силы трения прямо пропорцио-

нальна длине пути, пройденного телом. Данный частный случай не позволяет показать зависимость работы силы трения от формы траектории. Это объясняется тем, что при движении по плоскости в любом направлении сила реакции опоры, а, следовательно, и сила трения скольжения является константой.

Чтобы показать, что работа силы трения зависит не только от длины, но и от формы траектории, необходимо изучать движение тела в таких условиях, когда сила реакции опоры в различных точках траектории будет различной. Этим требованиям соответствует, например, движение тела по окружности в вертикальной плоскости.

Физическая модель

Рассмотрим следующую физическую систему взаимодействующих тел.

Тело шарообразной формы массой m имеет сквозное отверстие, проходящее через диаметр. Через это отверстие пропущена стальная направляющая, по которой тело может скользить с трением. Направляющая закреплена на вертикальной опоре и состоит из двух участков: прямолинейного и кругового радиусом R (рис. 1). Направляющая обеспечивает движение тела по фиксированной траектории в вертикальной плоскости. На одном конце прямолинейного участка направляющей расположена пружина жесткостью k . В начальный момент тело располагается вплотную к пружине. Сжимая пружину на некоторую величину Δx , и удерживая возле нее тело, можно сообщить системе начальную энергию. Когда тело и пружину перестают удерживать, тело под действием силы упругости начинает двигаться. Когда пружина полностью распрямится, сила упругости перестает действовать на тело. Так как тело не соединено с пружиной, оно продолжает двигаться по инерции вдоль направляющей.

В зависимости от того, какой энергией обладала система в начальный момент времени, тело может: подняться на некоторую высоту по круговому участку направляющей и начать соскальзывать вниз; подняться до наивысшей точки направляющей; преодолеть наивысшую точку направляющей и начать соскальзывать вниз по противоположной стороне кругового участка направляющей. На всем пути движения действует сила трения.

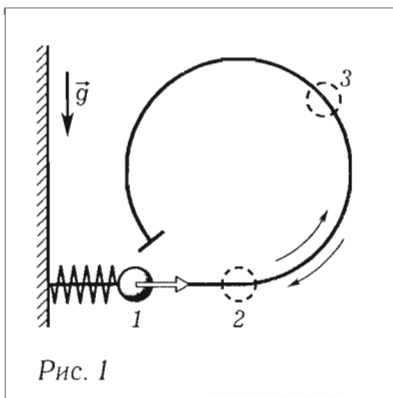


Рис. 1

Пусть энергии сжатой пружины достаточно, чтобы тело поднялось по круговому участку направляющей на некоторую высоту (меньше наивысшей точки направляющей) и спустилось вниз по той же стороне кругового участка направляющей, по которой оно поднималось. Рассмотрим движение тела (рис. 1) из точки 1 (начальное положение тела) до точки 3 (точка наивысшего подъема h_{\max}). В начальный момент, в точке 1 тело покоится, поэтому его полная механическая энергия E_1 в этой точке равна потенциальной энергии сжатой пружины (потенциальную энергию силы тяжести в этой точке приняли за нуль):

$$E_1 = U_1 = k \frac{\Delta x^2}{2}.$$

В точке 3 скорость тела также равна нулю. При движении по круговому участку сила упругости на тело не действует. Следовательно, полная механическая энергия E_3 системы в точке 3 равна потенциальной энергии силы тяжести

$$E_3 = U_3 = mgh_{\max}.$$

Обозначим работу силы трения на участке траектории между точками 1 и 3 как A . Тогда согласно закону сохранения энергии

$$E_3 - E_1 = A.$$

Учитывая, что диссипативные силы приводят к потерям энергии, $E_1 > E_3$, тогда

$$E_1 - E_3 = |A| \quad \text{или} \quad U_1 - U_3 = |A|.$$

Таким образом, зная сжатие пружины Δx в начальный момент времени и максимальную высоту h_{\max} , на которую поднялось тело по круговому участку направляющей, можно рассчитать работу силы трения. Однако, направляющая, по которой движется тело, имеет два участка: прямолинейный, на котором сила реакции опоры, а, следовательно, и сила трения постоянна, и круговой, в каждой точке которого сила реакции опоры будет разной. Следовательно, необходимо рассмотреть работу силы трения на каждом участке.

Работа силы трения

Сила трения $F = \mu|N|$ всегда направлена в сторону, противоположную движению, поэтому работа силы трения всегда отрицательна

$$A = \int_1^3 \vec{F} d\vec{r} = -\mu \int_1^3 |N| dr,$$

μ — коэффициент трения, $|N|$ — модуль силы нормального давления \vec{N} тела на опору, который по третьему закону Ньютона равен модулю силы реакции опоры $\vec{R}_{\text{оп}}$: $\vec{N} = -\vec{R}_{\text{оп}}$ или $|N| = |R_{\text{оп}}|$.

При движении по горизонтальному участку направляющей длиной L сила реакции опоры $\vec{R}_{\text{оп}}$ направлена вертикально вверх (рис. 2а) и одинакова во всех точках. Следовательно, $|N| = mg$. Тогда работу силы трения на этом участке (между точками 1 и 2) можно записать как

$$A_{\text{нр}} = -\mu \int_1^2 |N| dr = \\ = -\mu \int_0^L mg \cdot dl = -\mu mgL.$$

То есть работа силы трения при движении по прямолинейному участку направляющей прямо пропорциональна длине пути, пройденного телом.

При движении по круговому участку направляющей сила реакции опоры $\vec{R}_{\text{оп}}$ направлена вдоль радиуса окружности (к центру или от него). Положение тела на окружности (рис. 2б) удобно задавать в полярных координатах R и φ (R — ра-

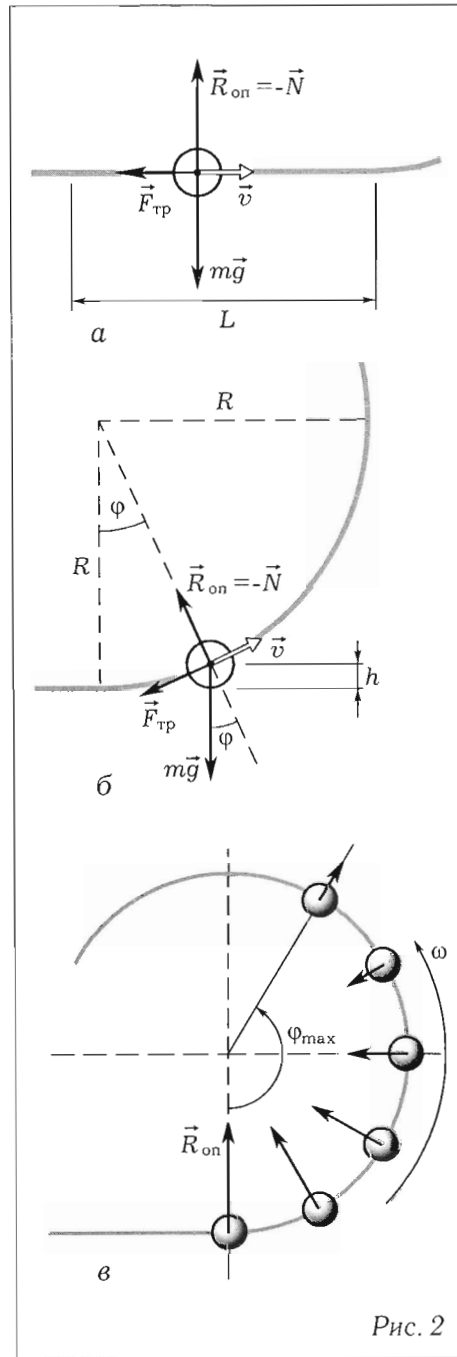


Рис. 2

диус окружности, φ — полярный угол, за нулевое значение которого примем положение, когда тело переходит с прямолинейного участка направляющей на круговой — самое нижнее положение на круговом участке направляющей).

Чтобы определить модуль силы реакции опоры $|R_{\text{оп}}|$, запишем второй закон Ньютона $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ в проекции на радиальное направление (в полярных координатах):

$$mR\omega^2 = R_{\text{оп}} - mg \cos \varphi,$$

где $\omega = d\varphi/dt$ — угловая скорость движения тела по окружности, $R\omega^2 = R(d\varphi/dt)^2$ — центростремительное ускорение, $R = \text{const}$ — радиус окружности; сила трения направлена по касательной, перпендикулярно радиусу, поэтому ее проекция на радиальное направление равна нулю.

Тогда сила реакции опоры равна $R_{\text{оп}} = m(R\omega^2 + g \cos \varphi)$. Сила реакции опоры зависит не только от полярного угла φ , но и от угловой скорости ω , с которой движется тело. Так как тело движется по направляющей, то сила реакции опоры может быть направлена как к центру окружности, так и в противоположную сторону (рис. 2в).

Тогда работа силы трения между точками 2 ($h = 0, \varphi = 0$) и 3 ($h = h_{\text{max}}, \varphi = \varphi_{\text{max}}$) на круговом участке направляющей равна

$$A_{\text{кр}} = -\mu \int_2^3 |N| dr = -\mu m \int_2^3 |R\omega^2 + g \cos \varphi| dr.$$

Переходя к интегрированию по углам $dr = R d\varphi$, получим:

$$A_{\text{кр}} = -\mu m \int_2^3 |R\omega^2 + g \cos \varphi| dr = -\mu m R \int_0^{\varphi_{\text{max}}} |R\omega^2 + g \cos \varphi| d\varphi.$$

Обозначив интеграл

$$I = \int_0^{\varphi_{\text{max}}} |R\omega^2 + g \cos \varphi| d\varphi = \int_0^{\varphi_{\text{max}}} \left| \frac{R_{\text{оп}}}{m} \right| d\varphi,$$

работу силы трения можно записать в виде $A_{\text{кр}} = -\mu m R I$.

Чтобы рассчитать интеграл I , необходимо знать зависимость угловой скорости от полярного угла $\omega = \omega(\varphi)$. Эту зависимость можно получить либо из второго закона Ньютона в проекции на

орт полярного угла, либо из экспериментальных данных. И в том и в другом случае задача сводится к численному интегрированию.

Рассмотрим, как можно определить работу силы трения на круговом участке направляющей по экспериментальным данным.

Экспериментальное изучение работы силы трения и определение коэффициента трения

Если в эксперименте подобраны условия так, что тело, поднявшись по круговому участку на максимальную высоту (ниже наивысшей точки), начинает скатываться вниз, то из закона сохранения энергии модуль работы силы трения на всем пути до точки максимального подъема равен

$$|A| = U_1 - U_3, \quad \text{где} \quad U_1 = k \frac{\Delta x^2}{2}, \quad U_3 = mgh_{\max}.$$

До точки максимального подъема тело движется сначала по линейному участку направляющей, а затем по круговому, поэтому

$$A = A_{\text{пр}} + A_{\text{кр}}, \quad \text{где} \quad A_{\text{пр}} = -\mu mgL, \quad A_{\text{кр}} = -\mu mRI.$$

Тогда

$$|A| = \mu(mgL + mRI),$$

следовательно,

$$\mu = \frac{|A|}{mgL + mRI}.$$

Для численного расчета интеграла I необходимо из эксперимента получить зависимость полярной угловой координаты тела от времени $\varphi = \varphi(t)$ при подъеме тела по круговому участку траектории как совокупность значений φ_i в различные моменты времени t_i . На основе этой зависимости можно определить угловую скорость тела ω в различных точках траектории: $\omega = d\varphi/dt$, следовательно,

$$\omega_i \approx \frac{\Delta\varphi_i}{\Delta t_i} = \frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{t_i - t_{i+1}}$$

и силу реакции опоры, отнесенную к массе тела, в разных точках траектории

$$\frac{R_{\text{оп}}}{m} = R\omega_i^2 + g \cos \varphi_{\text{ср}}, \quad \text{где} \quad \varphi_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i+1}).$$

Тогда согласно методам вычислительной математики интеграл I можно приближенно (численно) рассчитать как

$$I \equiv \int_0^{\varphi_{\max}} \left| \frac{R_{\text{оп}}}{m} \right| d\varphi \approx \sum_i \left| \frac{R_{\text{оп}}}{m} \right| \Delta\varphi_i.$$

Таким образом, экспериментально измерив зависимость $\varphi = \varphi(t)$, можно определить коэффициент трения μ между телом и направляющей.

Определение работы силы трения на круговом участке направляющей

Если коэффициент трения μ известен (например, определен из предыдущего опыта), то модуль работы силы трения на круговом участке траектории можно определить из закона сохранения энергии

$$U_1 - U_3 = |A| = |A_{\text{пр}}| + |A_{\text{кр}}| = \mu mgL + |A_{\text{кр}}|.$$

Следовательно,

$$|A_{\text{кр}}| = U_1 - U_3 - \mu mgL.$$

Таким образом, на основе экспериментальных данных и расчета работы силы трения на линейном участке траектории можно определить работу силы трения на круговом участке.

Известно, что работа силы трения как неконсервативной силы зависит от длины пути, пройденного телом. Для определения характера этой зависимости определим длину пути L_φ при движении по круговому участку направляющей, которая равна длине дуги окружности от 0 до φ_{\max}

$$L_\varphi = R\varphi_{\max}.$$

Как было показано ранее

$$|A_{\text{кр}}| = \mu mR \int_0^{\varphi_{\max}} |R\omega^2 + g \cos \varphi| d\varphi.$$

Если тело прошло по круговому участку направляющей малое расстояние $L_\varphi \rightarrow 0$ ($\varphi_{\max} \rightarrow 0$), все величины под интегралом положительные, а угловая скорость ω стремится к нулю (тело останавливается). Тогда модуль работы силы трения можно рассчитать

$$\begin{aligned} |A_{\text{кр}}| &= \mu mR \int_0^{\varphi_{\max}} (R\omega^2 + g \cos \varphi) d\varphi \approx \\ &\approx \mu mRg \int_0^{\varphi_{\max}} \cos \varphi d\varphi = \mu mRg \sin \varphi_{\max}, \end{aligned}$$

при малом угле максимального подъема $\varphi_{\max} \rightarrow 0$

$$|A_{\text{кр}}| \approx \mu m R g \sin \varphi_{\max} \rightarrow \mu m g R \varphi_{\max} = \mu m g L_{\varphi}$$

или $|A_{\text{кр}}|/L_{\varphi} \rightarrow \mu m g$.

Таким образом, если тело проходит по круговому участку направляющей малое расстояние, то работа силы трения прямо пропорциональна длине пути. Если расстояние L_{φ} , пройденное телом по окружности, нельзя считать малым, то следует ожидать, что работа силы трения тоже зависит от длины пути, но не линейно, а более сложным образом.

Чтобы на основе экспериментальных данных проанализировать, как работа силы трения на круговом участке направляющей зависит от длины пройденного телом пути, вычислим отношение модуля работы силы трения к длине пройденного пути $|A_{\text{кр}}|/L_{\varphi}$.

Если это отношение одинаково для разных L_{φ} , то работа зависит от пути линейно. Если с увеличением (уменьшением) пути L_{φ} отношение $|A_{\text{кр}}|/L_{\varphi}$ изменяется, это означает, что работа зависит от пути не линейно, а каким-то более сложным образом.

Компьютерная модель экспериментальной установки и результаты исследования

Предложенная методика исследования работы силы трения реализована авторами в виде компьютерной лабораторной работы «Работа и энергия» (рис. 3).

Работа выполняется в два этапа. На первом этапе получают экспериментальную зависимость угловой координаты тела на круговом участке направляющей от времени $\varphi = \varphi(t)$, на основе которой получают зависимости от полярной угловой координаты для угловой скорости $\omega = \omega(\varphi)$ и силы реакции опоры. На рис. 4 а приведен пример экспериментально полученной зависимости проекции силы реакции опоры, отнесенной к массе тела, от полярной угловой координаты тела при подъеме по круговому участку направляющей. На основе этой зависимости можно выполнить численное интегрирование и рассчитать коэффициент трения между телом и стальной направляющей.

Чтобы получить экспериментальную зависимость $\varphi = \varphi(t)$, в работе в области эксперимента расположен датчик высоты, синхронизированный с секундомером. Секундомер включается автоматически, когда убирают механизм, удерживающий тело и сжатую в начальном состоянии пружину. Когда тело пересекает уровень, на котором установлен датчик высоты, секундомер выключается. Располагая датчик на разных высотах, можно получить зависимость высоты подъема тела по направляющей от времени, а также зависимость угловой координаты тела от времени $\varphi = \varphi(t)$.

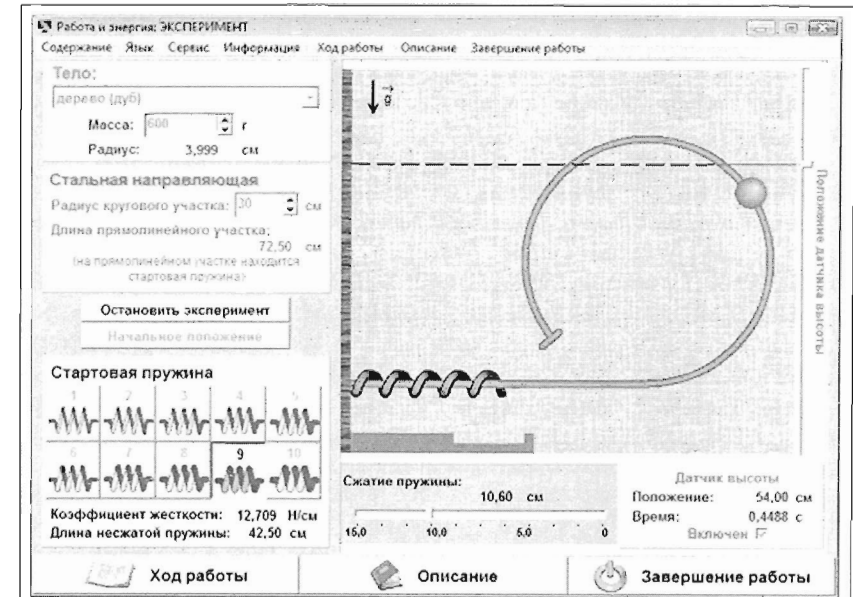


Рис. 3

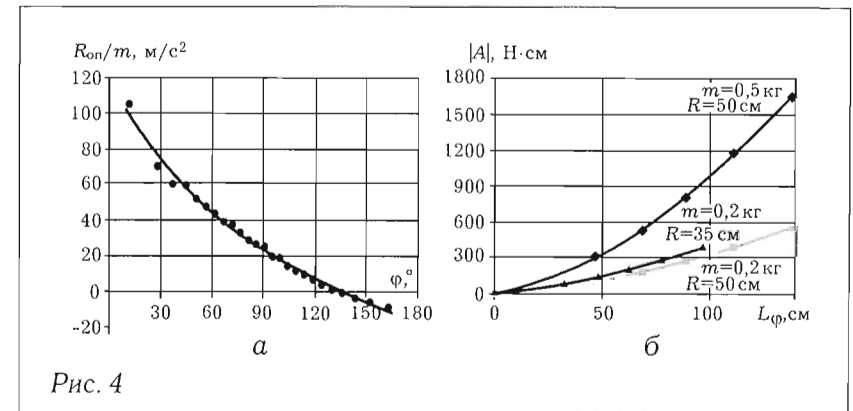


Рис. 4

Из приведенной на рис. 4 а экспериментальной зависимости проекции силы реакции опоры, отнесенной к массе $R_{\text{оп}}/m$, при движении по круговому участку направляющей видно, что сила реакции опоры меняет направление при приближении к наивысшей точке направляющей ($\varphi \rightarrow 180^\circ$). Эта зависимость используется для численного расчета интеграла I и определения коэффициента трения, который в опытах с телом, сделанным из алюминия, получается равным 0,183.

На втором этапе изучают, как работа силы трения при подъеме по круговому участку направляющей до остановки зависит от длины траектории и ее формы (радиуса) для тел различной массы.

На рис. 4 б приведены результаты исследования зависимости модуля работы силы трения от длины пути, пройденного телом по круговому участку направляющей. Исследования проводились для тел разной массы, сделанных из полиуретана. Графики наглядно демонстрируют нелинейный характер зависимости работы силы трения от пути, пройденного телом, в то время как на прямолинейном участке направляющей эта зависимость является линейной. Таким образом, выполнение данной работы позволяет студенту убедиться, что работа неконсервативных сил зависит как от длины, так и от формы траектории, по которой движется тело.

Данная работа выполняется студентами в рамках лабораторного практикума по курсу общей физики, содержательно и методологически дополняя имеющийся на кафедре теоретической и экспериментальной физики Томского политехнического университета набор натурных лабораторных работ. Данная работа входит в комплекс лабораторных работ по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере, который разрабатывается на кафедре с 2002 г. В настоящее время комплекс включает 24 лабораторные работы.

Национальный исследовательский
Томский политехнический
университет

Поступила в редакцию 14.01.11.

Н. В. Стихина

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА *MATHCAD* ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В школах дается представление о компьютерных моделях, численных методах изучения различных объектов познания, современные школьники достаточно свободно ориентируются в доступных программных продуктах. Пакет *MathCAD* обладает широкими возможностями для решения физических задач. Особым его преимуществом является возможность построения анимированных моделей движения. В статье рассмотрено решение типовых задач по механике. Использование пакета *MathCAD* в процессе обучения позволяет повысить интерес школьников к научно-исследовательской работе.

Ключевые слова: механика, физическая задача, компьютерная модель.

Современный этап общественного развития характеризуется всемирным внедрением информационных технологий, что предъявляет новые требования к обучению. Перед школой стоит задача подготовки выпускников, способных самостоятельно приобретать необходимые знания, осваивать новые виды деятельности и, как следствие, быть успешными в жизни. Школьник должен быть способен к активному творческому овладению знаниями, уметь быстро и адекватно реагировать на меняющуюся ситуацию, прогнозировать развитие событий и владеть информационными технологиями.

Школа дает представление о компьютерных моделях, численных методах изучения различных объектов познания. Современные учащиеся достаточно свободно ориентируются в современных программных продуктах, некоторые умеют работать с современными математическими пакетами, различными системами компьютерной математики.

Построение компьютерной модели базируется на абстрагировании от конкретной природы явления или изучаемого объекта-оригинала и состоит из двух этапов — сначала создание качественной, а затем и количественной модели. Компьютерное моделирование заключается в проведении серии вычислительных экспериментов на компьютере, целью которых является анализ, интерпретация