Н. С. Кравченко, О. Г. Ревинская

ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ И ЕЕ РЕАЛИЗАЦИЯ НА КОМПЬЮТЕРЕ

В работе изучают свойства распределения ансамбля хаотически движущихся тождественных частиц по абсолютным значениям скорости. Для идентификации частиц, имеющих скорости в различных диапазонах, используется влияние силы тяжести на траекторию частиц, движущихся под углом к горизонту. На основе данной модели разработана компьютерная лабораторная работа, позволяющая студентам не только лучше разобраться во взаимосвязи характеристических параметров распределения с массой и температурой ансамбля частиц, но и на практике познакомиться с особенностями накопления и обработки статистической информации.

Распределение Максвелла по абсолютным значениям скорости частиц

Согласно теории Максвелла в отсутствие внешних полей скорости частиц меняются в результате упругих столкновений друг с другом, которые в условиях термодинамического равновесия носят случайный характер. Тогда модуль (абсолютное значение) скорости — случайная физическая величина, функция распределения $F(v)$ которой имеет вид

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot v^2 e^{-mv^2/2kT}.$$

Эта функция распределения описывает плотность вероятности того, что абсолютная скорость частицы лежит в интервале $[v, v + dv]$ при всех возможных направлениях движения. Функция $F(v)$ является непрерывной и положительно определенной на интервале

$[0, \infty)$ и имеет максимум при скорости $v_{\text{в}} = \sqrt{2kT/m}$, которую принято называть наивероятнейшей.

Согласно математической статистике характеристическими для статистических распределений являются среднее и среднеквадратичное значения случайной величины. Соответственно, для функции распределения Максвелла характеристическими являются средняя и среднеквадратичная скорости:

$$<v>= \int_0^\infty vF(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \text{и} \quad v_{\text{кв}} = \sqrt{<v^2>},$$

где

$$<v^2>= \int_0^\infty v^2F(v)dv, \qquad v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Легко заметить, что значения всех характеристических скоростей и вид функции распределения $F(v)$ зависят от массы m частиц и температуры T. Эти зависимости и нужно исследовать в лабораторной работе по изучению распределения Максвелла.

Согласно математической статистике многократное наблюдение за одной частицей эквивалентно единичному наблюдению за совокупностью идентичных независимых частиц.

Если ансамбль состоит из N независимых частиц, то вероятность dP_v того, что частица имеет абсолютную скорость из интервала $[v, v + dv]$, с одной стороны по определению функции распределения равна $dP_v = F(v)dv$. А с другой стороны та же вероятность dP_v — есть отношение количества частиц dN с интересующими нас скоростями к общему количеству N частиц: $dP_v = dN/N$. Поэтому

$$dP_v = F(v)dv = \frac{dN}{N}.$$

Тогда количество частиц dN, имеющих скорости в интервале $[v, v+dv]$, можно определить как

$$dN = NF(v)dv.$$

Отсюда вытекает физический смысл функции распределения: площадь под кривой $NF(v)$ на отрезке $[v_1, v_2]$ равна количеству молекул ΔN, имеющих абсолютные скорости в заданном интервале: $\Delta N = \int_{v_1}^{v_2} NF(v)dv$.

Это дает способ эмпирического получения функции распределения. Задача сводится к последовательному определению количества частиц, имеющих скорости в нескольких диапазонах скоростей.

Модель статистического исследования распределения Максвелла

Если ансамбль находится в состоянии, когда справедливо распределение Максвелла, то все частицы газа являются тождественными и движутся хаотично. При этом невозможно уследить даже за поведением одной частицы, не говоря уже о том, чтобы одновременно зафиксировать скорости всех частиц.

Чтобы изучать имеющееся распределение частиц по скоростям, необходимо создать условия, при которых частицы из области, где установилось данное распределение, перешли бы в другую область, где за ними было бы легко наблюдать, но так, чтобы их скорости сохранились.

Распределение Максвелла наблюдается, когда отсутствуют внешние поля, действие которых могло бы повлиять на скорости молекул. На скорость частицы могут оказывать влияние гравитационное, электрическое и магнитное поля.

Если ансамбль частиц находится в некоторой области пространства, например, в сосуде, где гравитация отсутствует, а частицы можно считать электронейтральными, то электрическое и магнитное поля на них также не влияют. Внутри такого сосуда со временем установится термодинамическое равновесие, и скорости частиц будут подчиняться распределению Максвелла.

Если в сосуде сделать отверстие, то частицы будут вылетать из него с той же скоростью, которой они обладали в сосуде. Если отверстие сделать достаточно маленьким, то скорости всех вылетевших частиц будут направлены одинаково. Поставив приемник на пути потока частиц, не удастся отделить быстро движущиеся частицы от медленных.

Чтобы вне сосуда разделить потоки частиц, имеющих разные по модулю скорости, необходимо подвергнуть их воздействию внешней силы, изменяющей направление движения частиц. Тогда частицы, имеющие разные по модулю скорости, будут разлетаться в разных направлениях.

Поскольку частицы считаем электронейтральными, то рассмотрим влияние силы тяжести на движение частиц газа, вылетевших из сосуда.

Если сосуд имеет сферическую форму, а отверстие на его поверхности расположено под углом α к горизонту, то частицы, вылетая из сосуда, будут иметь некоторую скорость v, направленную под углом α. Под действием силы тяжести вылетевшие частицы будут притягиваться к Земле и падать на некоторую горизонтальную поверхность (рис. 1). Движение будет плоским (двумерным). Поэтому расположим систему координат XOY так, что начало координат находится на горизонтальной поверхности строго под отверстием.

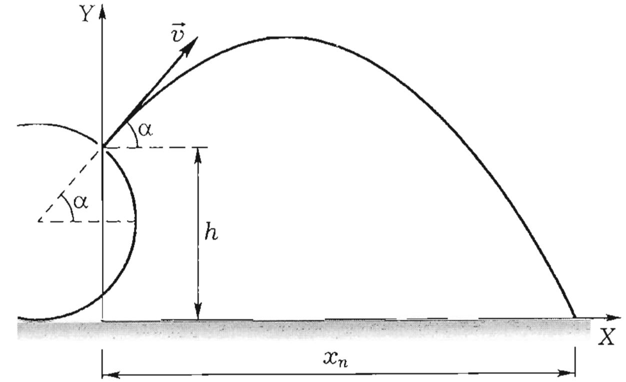

Рис. 1

Тогда второй закон Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g}$$

в проекциях на оси OX и OY записывается в виде системы уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Учитывая, что в начальный момент времени частица находилась на высоте h и имела скорость v, направленную под углом α, решение можно записать в виде

$$x = (v\cos\alpha)\cdot t,$$

$$y = h + (v\sin\alpha)\cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Тогда дальность полета x_n — это координата x в момент падения t_n:

$$t_n = \frac{x_n}{v\cos\alpha}.$$

В этот момент времени координата $y = 0$:

$$y = h + x_n\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{gx_n^2}{2v^2\cos^2\alpha} = 0.$$

Отсюда

$$v^2 = \frac{gx_n^2}{x_n\sin 2\alpha + 2h\cos^2\alpha}$$

или

$$v = \sqrt{\frac{gx_n^2}{x_n \sin 2\alpha + h(1+\cos 2\alpha)}}.$$

Полученное уравнение связывает дальность полета x_n частицы с модулем ее начальной скорости v. Следовательно, частицы с разной абсолютной скоростью в поле силы тяжести будут иметь разную дальность полета. Тогда можно определить, сколько частиц, вылетая из сосуда, имели абсолютные скорости в определенном интервале.

При одном и том же распределении частиц по абсолютным скоростям, но разном расположении отверстия, вылетевшие частицы засыпят на горизонтальной поверхности область разной длины. Следует ожидать, что при расположении отверстия под углом $\alpha = 45°$ частицы, вылетевшие из резервуара, покроют область максимальной длины. Это позволит получить более подробную информацию о функции распределения частиц по абсолютным скоростям в резервуаре.

Если область на горизонтальной поверхности, на которую падают частицы, разграничить на участки одинаковой длины Δx, можно определить, какое количество частиц окажется на участках, находящихся на разном расстоянии от сосуда. Каждому участку $[x_{i-1}, x_i]$ будет соответствовать определенный диапазон скоростей $[v_{i-1}, v_i]$, которыми должны обладать частицы, вылетая из сосуда, чтобы попасть на данный участок. По количеству частиц ΔN_i на каждом участке можно определить вероятность того, что частицы обладали скоростями из соответствующего интервала $[v_{i-1}, v_i]$: $\Delta P_i = \Delta N_i/N$ (N — общее количество вылетевших частиц), а также вычислить значение функции распределения:

$$F(v_i) = \frac{\Delta N_{i+1}}{N\Delta v_i}, \qquad \text{если } \Delta v_i = v_{i+1} - v_i.$$

Следует обратить внимание, что если горизонтальная поверхность, на которую падают частицы, разделена на участки (ячейки) одинаковой длины Δx, то соответствующие длины интервалов скоростей Δv_i будут различны, так как v зависит от x_n линейно только при $\alpha = 0$.

Условия экспериментального использования модели

Молекулы реальных газов имеют малую массу ($\sim 10^{-23}$ г) и размеры ($\sim 10^{-8}$ м). Учитывая связь между температурой и среднеквадратичной скоростью

$$<\varepsilon> = \frac{mv_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

легко заметить, что при комнатной температуре (~ 300 K) среднеквадратичная скорость молекул составляет $\sim 10^2$–10^3 м/с. В условиях, когда частицы пространственно разделяются по скоростям за счет влияния гравитационного поля, дальность полета таких молекул будет составлять $\sim 10^4$–10^5 м. Сравнение дальности полета с размерами частиц показывает, что невозможно наблюдать за столь малыми частицами на столь большом расстоянии.

Поэтому в лабораторной работе необходимо создать условия, при которых размеры и дальность полета частиц были бы соизмеримыми, а динамика их движения соответствовала распределению Максвелла по скоростям.

В работе используются тождественные частицы массой от 10 до 40 г. Для сравнения с молекулами газа можно ввести понятие эффективной температуры — это средняя кинетическая энергия, выраженная в единицах температуры

$$T = \frac{2}{3k} <\varepsilon> .$$

Для реальных газов эта величина соответствует реальной температуре. Учитывая связь меду температурой и среднеквадратичной скоростью, подберем эффективную температуру так, чтобы для частиц массой 10–40 г обеспечить дальность полета $\sim 10^2$ м. Для этого необходимо, чтобы эффективная температура частиц составляла $\sim 10^{22}$ K, что соответствует средней кинетической энергии ~ 1 Дж. Даже при отсутствии гравитации частицы массой 10–40 г не могут обладать столь высокой энергией только за счет теплового движения. Чтобы обеспечить столь высокую эффективную температуру, необходимо данной системе сообщить дополнительную кинетическую (механическую) энергию как-либо способом до начала эксперимента. Механические энергии такого порядка в реальности легко достижимы. Если потерь энергии в системе нет, то вся сообщенная системе энергия перейдет в хаотическое движение частиц. Это позволит полностью воспроизвести условия, при которых наблюдается распределение Максвелла по скоростям.

Эти условия были реализованы нами в лабораторной работе «Распределение Максвелла» (рис. 2). В этой работе студенты получают статистический материал для сравнения распределения частиц по абсолютным значениям скорости при различных эффективных температурах, а также для «газов» (ансамблей частиц) различной массы. Горизонтальную поверхность вне резервуара можно разделить на ячейки одинаковой длины. Количество ячеек можно изменять в широких пределах, регулируя степень детализации исследований.

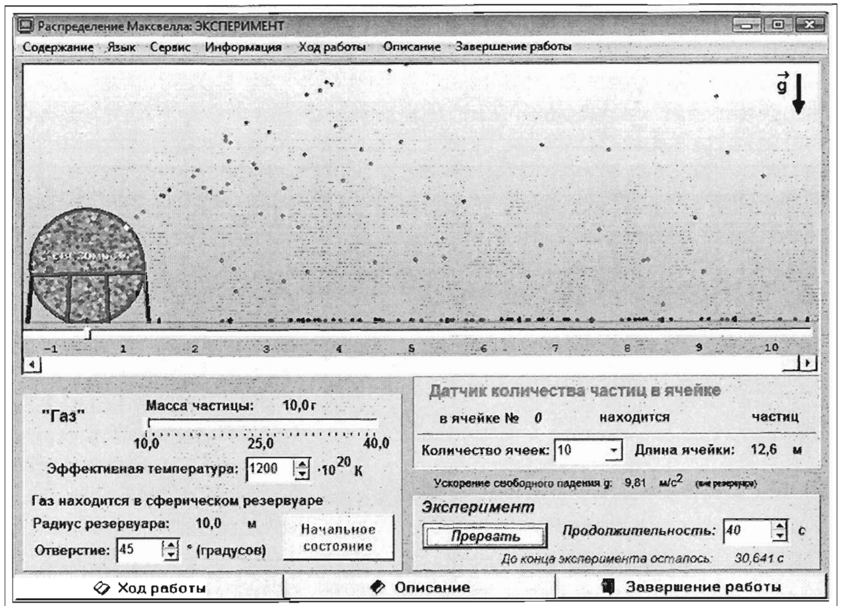

Рис. 2

С точки зрения методики важно подчеркнуть, что распределение Максвелла описывает распределение частиц по скоростям, а не в пространстве. Поэтому для ансамбля частиц фиксированной массы при одинаковой эффективной температуре будет наблюдаться одно и то же распределение, независимо от расположения отверстия (угла вылета частиц из резервуара). Чтобы подчеркнуть этот факт, студентам предлагается также выполнить исследования при различном расположении отверстия на поверхности резервуара. Положение отверстия задается в полярных координатах от 0 до 180° (при фиксированном значении радиуса).

Другой важной особенностью работ, связанных с изучением статистических распределений, является накопление статистической информации. Только обработав информацию о скоростях большого количества частиц, можно получить статистически значимые закономерности поведения ансамбля в целом. Так только при большом количестве экспериментальных данных можно говорить, что средняя скорость частиц растет с повышением температуры. Поэтому в работе в качестве подготовительного этапа рекомендуется подобрать время, в течение которого отверстие в резервуаре будет открыто. Время подбирается с таким расчетом,

чтобы из резервуара успевало вылететь 300–400 частиц. Тогда случайные флуктуации не будут оказывать статистически значимого влияния на полученные результаты.

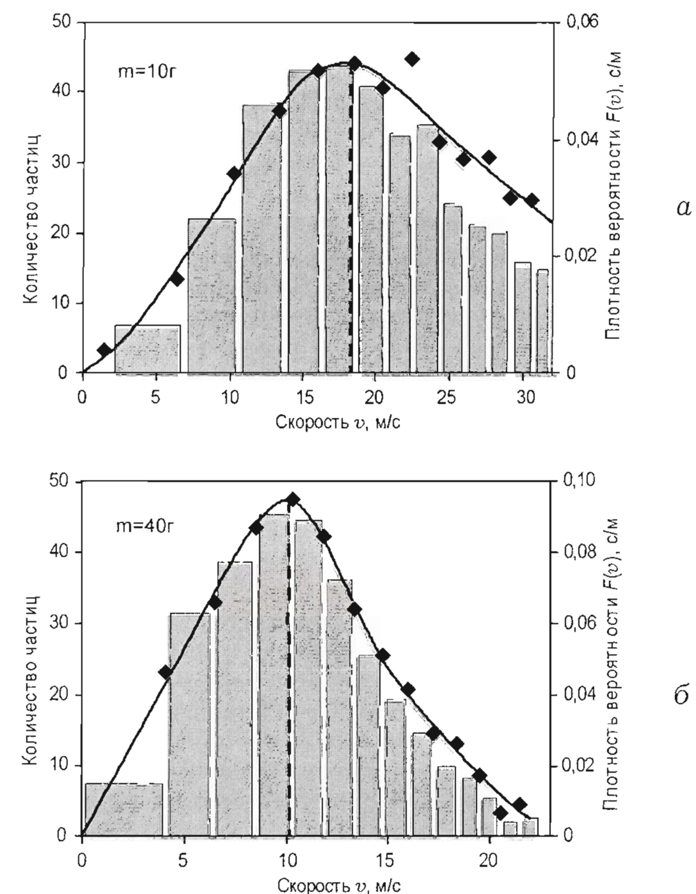

Рис. 3

На рис. 3 приведены примеры полученных при выполнении работы графических зависимостей. На каждом графике в виде гистограммы приведено количество частиц, наблюдавшихся в ячейках на горизонтальной плоскости. Каждой ячейке соответствует определенный диапазон скоростей, которые отложены по горизонтальной оси графика. На том же графике изображена функция распределения, рассчитанная по этим экспериментальным данным. Результаты, представленные на графиках *а* и *б*, получены при изучении ансамбля частиц различной массы при одинаковой температуре. Сравнивая эти результаты, легко заметить, что для частиц малой массы характерна бо́льшая наивероятнейшая скорость, чем для частиц большой массы. А функция распределения для ансамбля частиц большой массы имеет узкий максимум по сравнению с функций распределения ансамбля частиц малой массы.

Выполнение описанной лабораторной работы по изучению распределения Максвелла позволяет не только подробно изучить особенности распределения частиц по скоростям, но и актуализировать знания студентов, полученные в средней школе при изучении движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Данная работа выполняется студентами в рамках лабораторного практикума по курсу общей физики, содержательно и методологически дополняя имеющийся на кафедре ТиЭФ Томского политехнического университета набор натурных лабораторных работ. Данная работа входит в комплекс лабораторных работ по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере, который разрабатывается на кафедре с 2002 г. В настоящее время комплекс включает 22 лабораторные работы.

Томский политехнический университет

Поступила в редакцию 29.01.10.

Ю. А. Сауров

СОВРЕМЕННЫЙ МЕТОД НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ И ТВОРЧЕСТВО ДЕКАРТА

Показано, что многие положения рационалистической методологии познания Р. Декарта функционируют и в современной деятельности в сфере дидактики физики.

Одним из основателей науки Нового времени был гениальный Ренэ Декарт (1596–1650). Его идеи и достижения служат нам и сегодня. А на современном этапе освоения при обучении физике Стандарта второго поколения их понимание и использование — дополнительный ресурс для достижения успехов. Опыт показывает, что в обучении мы далеко не все знаем и используем из великого классического наследия. Наконец, лишний раз поклониться через 360 лет глубоким идеям небесполезно и для ума, и для дела.

Декарт строил не просто науку, он строил методологию построения науки Нового времени, методологию познания. Его едва ли не основная работа называется «Правила для руководства ума». Он писал: «Целью научных занятий должно быть *направление ума* (подчеркнуто нами — Ю. С.) таким образом, чтобы он выносил прочные и истинные суждения о всех встречающихся предметах...» [1, с. 272]. Таким образом, заданию нормы мышления, как сейчас делается в стандартах обучения физике, и тогда уделялось пристальное внимание.

Уже общепризнано, что мышление, историческое и социальное по природе, «передается» в обучении. Об этом много и целенаправленно в методике физики писал профессор В. В. Мултановский [3]. Но эта главная задача пока трудно решается теорией и практикой обучения.

С нашей точки зрения, сейчас основное внимание и надежды сосредоточены на:

а) освоении систем физических знаний по структуре–форме фундаментальной теории «основание — ядро — следствия» (В. В. Мултановский и др.), по структуре принципа цикличности