

УДК 53.681.3 (076.5)

## МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ РАБОТЫ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ НА ПРИМЕРЕ РАБОТЫ СИЛЫ ТРЕНИЯ И ЕЕ РЕАЛИЗАЦИЯ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Ревинская О.Г., Кравченко Н.С.

ГОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет»,  
Томск, e-mail: ogr@tpu.ru

Предложена модель экспериментального исследования особенностей работы силы трения, как неконсервативной силы. Учитывая связь модуля силы трения с силой реакции опоры, показано, что подтвердить зависимость работы неконсервативной силы не только от длины, но и от вида траектории, по которой движется тело, возможно, если исследовать движение тела по поверхности, угол наклона по отношению к горизонту которой различен в разных точках. Несмотря на то, что аналитические расчеты работы силы трения в этом случае оказываются, как правило, весьма затруднительными, использование закона сохранения энергии для определения работы силы трения позволяет детально изучить работу этой силы на участках траектории различной длины и формы. Выполнение подобных исследований в рамках лабораторного практикума способствует формированию более глубоких представлений о различиях между консервативными и неконсервативными силами в физике.

**Ключевые слова:** физическая модель, консервативные и неконсервативные силы, работа силы трения, закон сохранения энергии, компьютерная лабораторная работа

## TECHNIQUE OF EXPERIMENTAL STUDYING OF WORK DISSIPATIVE FORCES ON AN EXAMPLE OF WORK OF FORCE OF A FRICTION AND ITS REALIZATION ON THE COMPUTER

Revinskaya O.G., Kravchenko N.S.

National research Tomsk polytechnic university, Tomsk, e-mail: ogr@tpu.ru

The model of an experimental research of features of work of force of a friction, as nonconservative force is offered. Considering communication of the module of force of a friction with force of reaction of a support, it is shown what to confirm dependence of work of nonconservative force not only on length, but also on the trajectory on which the body moves, probably, if to investigate body movement on a surface, the angle of slope in relation to which horizon is distinguished in different points. Despite that analytical calculations of work of force of a friction in this case appear, as a rule, rather inconvenient, use of the law of conservation of energy for definition of work of force of a friction allows to study in details work of this force on sites of a trajectory of various length and the form. Performance of similar researches within the limits of a laboratory practical work promotes formation of deeper representations about distinctions between conservative and nonconservative forces in the physicist.

**Keywords:** physical model, conservative and nonconservative forces, work of force of a friction, the law of conservation of energy, computer laboratory work

Понятие консервативной и неконсервативной силы относится к числу фундаментальных понятий курса общей физики, которое вводится в механике. Принципиальное отличие консервативных и неконсервативных сил состоит в характере работы, совершаемой ими при движении тела по некоторому участку траектории. В отличие от консервативных сил, работа которых зависит только от начального и конечного положения тела, работа неконсервативных сил зависит также от длины и формы траектории, по которой движется тело. Одним из типовых примеров неконсервативных сил является сила трения скольжения. Рассчитав работу силы трения при движении тела по плоскости (наклонной или горизонтальной), традиционно делают вывод, что работа силы трения прямо пропорциональна длине пути, пройденного телом [1]. Данный частный случай не позволяет показать зависимость работы силы трения от формы траектории. В результате у студентов формиру-

ются упрощенные представления о влиянии силы трения на работу различных конструкций и механизмов и о возможности корректного учета этого влияния. Это объясняется тем, что при движении по плоскости в любом направлении сила реакции опоры, а следовательно, и сила трения скольжения является константой.

Чтобы показать, что работа силы трения скольжения зависит не только от длины, но и от формы траектории, необходимо изучать движение тела в таких условиях, когда сила реакции опоры в различных точках траектории будет различной. Этим требованиям соответствует, например, движение тела по окружности в вертикальной плоскости.

### Физическая модель

Пусть тело шарообразной формы массой  $m$  имеет сквозное отверстие, проходящее через диаметр. Через это отверстие пропущена стальная направляющая, по которой тело может скользить с трением.

Направляющая закреплена на вертикальной опоре и состоит из двух участков: прямолинейного и кругового радиусом  $R$  (рис. 1). Направляющая обеспечивает движение тела по фиксированной траектории в вертикальной плоскости. На одном конце прямолинейного участка направляющей расположена пружина с жесткостью  $k$ . В начальный момент тело располагается вплотную к пружине. Сжимая пружину на некоторую величину  $\Delta x$  и удерживая возле нее тело, можно сообщить системе начальную энергию. Когда тело и пружину перестают удерживать, тело под действием силы упругости начинает двигаться. Когда пружина полностью распрямится, сила упругости перестает действовать на тело. Так как тело не соединено с пружиной, оно продолжает двигаться по инерции вдоль направляющей.

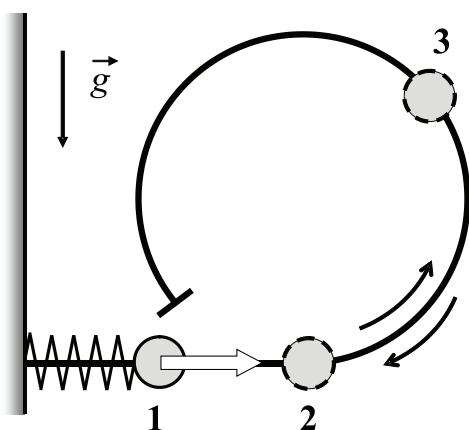


Рис. 1. Физическая модель

В зависимости от того какой энергией обладала система в начальный момент времени, тело может: подняться на некоторую высоту по круговому участку направляющей и начать скатываться вниз; подняться до наивысшей точки направляющей; преодолеть наивысшую точку направляющей и начать скатываться вниз по противоположной стороне кругового участка направляющей. На всем пути движения действует сила трения.

Пусть энергии сжатой пружины достаточно, чтобы тело поднялось по круговому участку направляющей на некоторую высоту (меньше наивысшей точки направляющей) и скатилось вниз по той же стороне кругового участка направляющей, по которой оно поднималось. Рассмотрим движение тела (см. рис. 1) из точки 1 (начальное положение тела) до точки 3 (точка наивысшего подъема на высоте  $h_{\max}$ ). В начальный момент, в точке 1 тело покоится, поэтому его полная механическая энергия  $E_1$  в этой точке равна потенциальной энергии сжатой

пружины (потенциальную энергию силы тяжести в этой точке приняли за ноль):

$$E_1 = U_1 = k \frac{\Delta x^2}{2}.$$

В точке 3 скорость тела также равна нулю. При движении по круговому участку сила упругости на тело не действует. Следовательно, полная механическая энергия  $E_3$  системы в точке 3 равна потенциальной энергии силы тяжести

$$E_3 = U_3 = mgh_{\max}.$$

Обозначим работу силы трения на участке траектории между точками 1 и 3 как  $A$ . Тогда согласно закону сохранения полной механической энергии

$$E_3 - E_1 = A.$$

Учитывая, что диссипативные силы [2] приводят к потерям энергии,  $E_1 > E_3$

$$E_1 - E_3 = |A| \quad \text{или} \quad U_1 - U_3 = |A|.$$

Таким образом, зная сжатие пружины  $\Delta x$  в начальный момент времени и максимальную высоту  $h_{\max}$ , на которую поднялось тело по круговому участку направляющей, можно рассчитать работу силы трения. Однако направляющая, по которой движется тело, имеет два участка: прямолинейный, на котором сила реакции опоры, а следовательно, и сила трения постоянна, и круговой, в каждой точке которого сила реакции опоры будет разной. Следовательно, необходимо рассмотреть работу силы трения на каждом участке.

### Работа силы трения скольжения

Сила трения скольжения  $F = \mu |N|$  всегда направлена в сторону, противоположную движению, поэтому работа силы трения всегда отрицательна

$$A = \int_1^3 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -\mu \int_1^3 |N| \cdot dr,$$

где  $\mu$  – коэффициент трения,  $|N|$  – модуль силы нормального давления  $\vec{N}$  тела на опору, который по третьему закону Ньютона равен модулю силы реакции опоры  $\vec{R}_{on}$ :  $\vec{N} = -\vec{R}_{on}$  или  $|N| = |R_{on}|$ .

При движении по *горизонтальному прямолинейному участку направляющей* длиной  $L$  сила реакции опоры  $\vec{R}_{on}$  направлена вертикально вверх (рис. 2а) и одинакова во всех точках. Следовательно,  $|N| = mg$ . Тогда работу силы трения на этом участке (между точками 1 и 2) можно записать как

$$A_{\text{пр}} = -\mu \int_1^2 |N| \cdot dr = -\mu \int_0^L mg \cdot dl = -\mu mgL.$$

То есть работа силы трения при движении по прямолинейному участку направляющей прямо пропорциональна длине пути, пройденного телом.

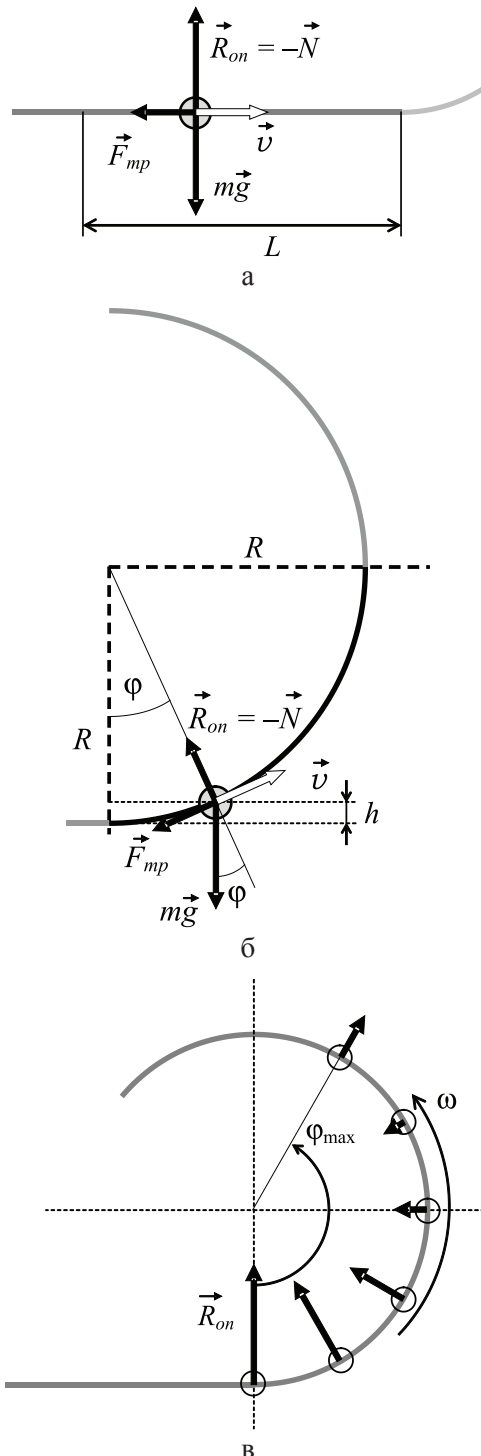


Рис. 2. Сила реакции опоры

При движении по *круговому участку направляющей* сила реакции опоры  $\vec{R}_{on}$  направлена вдоль радиуса окружности (к центру или от него). Положение тела на

окружности (рис. 2б) удобно задавать в полярных координатах  $R$  и  $\phi$  ( $R$  – радиус окружности,  $\phi$  – полярный угол, за нулевое значение которого примем положение, когда тело переходит с прямолинейного участка направляющей на круговой – самое нижнее положение на круговом участке направляющей).

Чтобы определить модуль силы реакции опоры  $|R_{on}|$ , запишем второй закон Ньютона  $m\vec{a} = \sum \vec{F}$  в проекции на радиальное направление (в полярных координатах):

$$mR\omega^2 = R_{on} - mg \cos \phi,$$

где  $\omega = \frac{d\phi}{dt}$  – угловая скорость движения тела по окружности,  $R\omega^2 = R \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2$  – центростремительное ускорение,  $R = \text{const}$  – радиус окружности; сила трения направлена по касательной, перпендикулярно радиусу, поэтому ее проекция на радиальное направление равна нулю.

Тогда сила реакции опоры равна

$$R_{on} = m(R\omega^2 + g \cos \phi).$$

Сила реакции опоры зависит не только от полярного угла  $\phi$ , но и от угловой скорости  $\omega$ , с которой движется тело. Так как тело движется по направляющей, то сила реакции опоры может быть направлена как к центру окружности, так и в противоположную сторону (рис. 2в). Тогда работа силы трения между точками 2 ( $h = 0, \phi = 0$ ) и 3 ( $h = h_{\max}, \phi = \phi_{\max}$ ) на круговом участке направляющей равна

$$A_{\text{кр}} = -\mu \int_2^3 |N| \cdot dr = -\mu m \int_2^3 |R\omega^2 + g \cos \phi| \cdot dr.$$

Переходя к интегрированию по углам  $dr = R d\phi$ , получим:

$$\begin{aligned} A_{\text{кр}} &= -\mu m \int_2^3 |R\omega^2 + g \cos \phi| \cdot dr = \\ &= -\mu m R \int_0^{\phi_{\max}} |R\omega^2 + g \cos \phi| \cdot d\phi, \end{aligned}$$

Обозначив интеграл

$$I = \int_0^{\phi_{\max}} |R\omega^2 + g \cos \phi| \cdot d\phi = \int_0^{\phi_{\max}} |R_{on} / m| \cdot d\phi,$$

работу силы трения можно записать в виде

$$A_{\text{кр}} = -\mu m R I.$$

Чтобы рассчитать интеграл  $I$ , необходимо знать зависимость угловой скорости от полярного угла  $\omega = \omega(\phi)$ . Эту зависимость можно получить либо из второго закона Ньютона в проекции на орт полярного

угла, либо из экспериментальных данных. И в том, и в другом случае задача сводится к численному интегрированию.

Если зависимость  $\omega = \omega(\varphi)$  известна, то интеграл

$$I = \int_0^{\varphi_0} |R_{on} / m| \cdot d\varphi$$

можно рассчитать на отрезках  $[0, \varphi_0]$  разной длины, и, следовательно, определить работу силы трения на круговом участке при разной длине пройденного пути.

Рассмотрим, как можно определить работу силы трения на круговом участке направляющей по экспериментальным данным.

### Экспериментальное изучение работы силы трения

Для численного расчета интеграла  $I$  необходимо из эксперимента получить зависимость полярной угловой координаты тела от времени  $\varphi = \varphi(t)$  при подъеме тела по круговому участку траектории как совокупность значений  $\varphi_i$  в различные моменты времени  $t_i$ . На основе этой зависимости можно определить среднюю угловую скорость тела  $\omega$  на различных участках траектории

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \omega_{cp_i} \approx \frac{\Delta\varphi_i}{\Delta t_i} = \frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{t_i - t_{i+1}}$$

и среднее значение проекции силы реакции опоры на радиальное направление, отнесенное к массе тела, на разных участках траектории

$$(R_{on} / m)_{cp_i} = R\omega_{cp_i}^2 + g \cos \varphi_{cp_i},$$

где  $\varphi_{cp_i} = \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i+1})$ .

Если моменты времени  $t_i$  выбраны так, что все  $\Delta t_i$  малы, то согласно методам вычислительной математики интеграл  $I$  можно приближенно (численно) рассчитать как

$$I \equiv \int_0^{\varphi_{max}} |R_{on} / m| d\varphi \approx \sum_i |R_{on} / m|_{cp_i} \cdot \Delta\varphi_i.$$

Таким образом, экспериментально измерив зависимость  $\varphi = \varphi(t)$ , из закона сохранения полной механической энергии и численного расчета интеграла  $I$  можно определить коэффициент трения  $\mu$  между телом и направляющей:

$$\mu = \frac{|A|}{mgL + mRI} = \frac{\frac{k\Delta x^2}{2m} - gh_{max}}{gL + RI}.$$

По тем же экспериментальным данным, рассчитав интеграл

$$I = \int_0^{\varphi_0} |R_{on} / m| \cdot d\varphi$$

на интервале от 0 до  $\varphi_0$  (меньше точки наивысшего подъема тела  $\varphi_{max}$ ), можно получить зависимость  $A_{кр} = A_{кр}(\varphi)$  работы силы трения от длины пути, пройденного телом по круговому участку  $L_\varphi$ . Учитывая характер изменения силы реакции опоры (рис. 2в) на круговом участке направляющей, следует ожидать, что эта зависимость будет носить нелинейный характер.

### Компьютерная модель экспериментальной установки и результаты исследования

Предложенная методика исследования работы силы трения скольжения реализована авторами в виде компьютерной лабораторной работы «Работа и энергия» (рис. 3). В работе можно экспериментировать с телами разной массы, изготовленными из различного материала. Набор пружин разной жесткости позволяет сообщить системе начальную энергию, достаточную для подъема тела по направляющей на максимально возможную высоту.

Работа выполняется в два этапа. На первом этапе получают экспериментальную зависимость угловой координаты тела на круговом участке направляющей от времени  $\varphi = \varphi(t)$ , на основе которой получают зависимости от полярной угловой координаты для угловой скорости  $\omega = \omega(\varphi)$  и силы реакции опоры. На рис. 4,а приведен пример экспериментально полученной зависимости проекции силы реакции опоры от полярной угловой координаты тела при подъеме тел разной массы (0,5 и 0,2 кг) по круговому участку направляющей. На основе этой зависимости можно выполнить численное интегрирование и рассчитать коэффициент трения между телом и стальной направляющей.

Чтобы получить экспериментальную зависимость  $\varphi = \varphi(t)$ , в работе в области эксперимента расположен датчик высоты, синхронизированный с секундомером. Секундомер включается автоматически, когда убирают механизм, удерживающий тело и сжатую в начальном состоянии пружину. Когда тело пересекает уровень, на котором установлен датчик высоты, секундомер выключается. Располагая датчик на разных высотах, можно получить зависимость высоты подъема тела по направляющей от времени. Каждой высоте соответствует определенный полярный угол. Благодаря этому экспериментально получают зависимость угловой координаты тела от времени  $\varphi = \varphi(t)$ .

Из приведенной на рис. 4а экспериментальной зависимости проекции силы реакции опоры  $R_{on}$  при движении по кругово-

му участку направляющей видно, что сила реакции опоры меняет направление при приближении к наивысшей точке направляющей ( $\varphi \rightarrow 180^\circ$ ). Эта зависимость исполь-

зуется для численного расчета интеграла  $I$  и определения коэффициента трения, который в опытах с телом, сделанным из алюминия, получается равным 0,183.

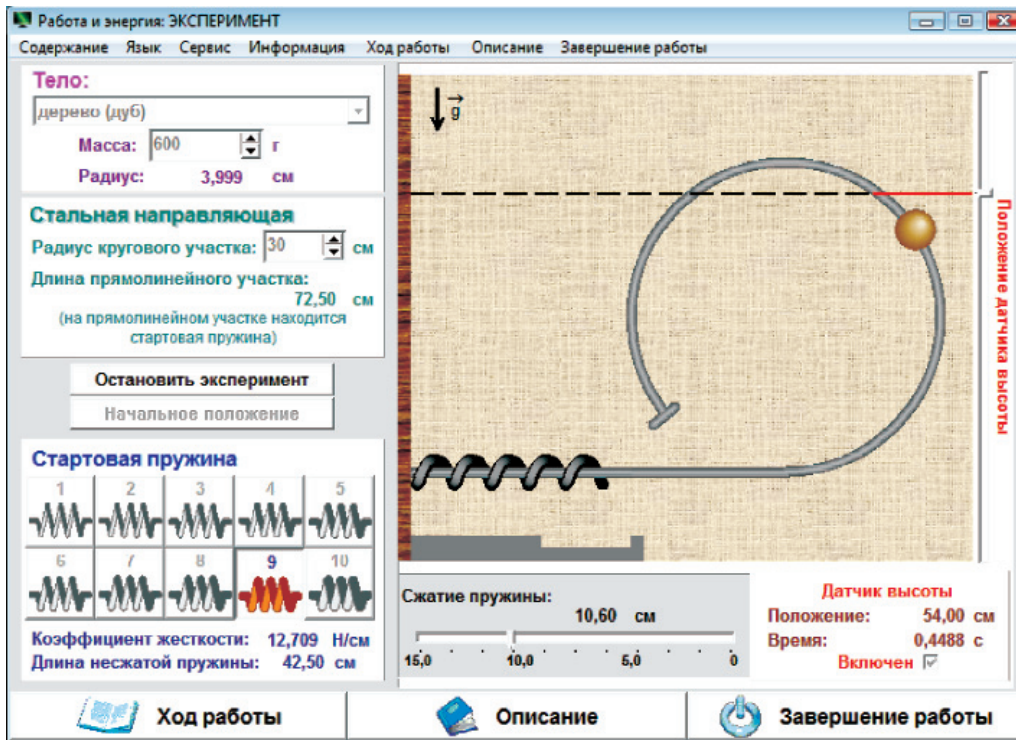


Рис. 3. Компьютерная лабораторная работа «Работа и энергия»

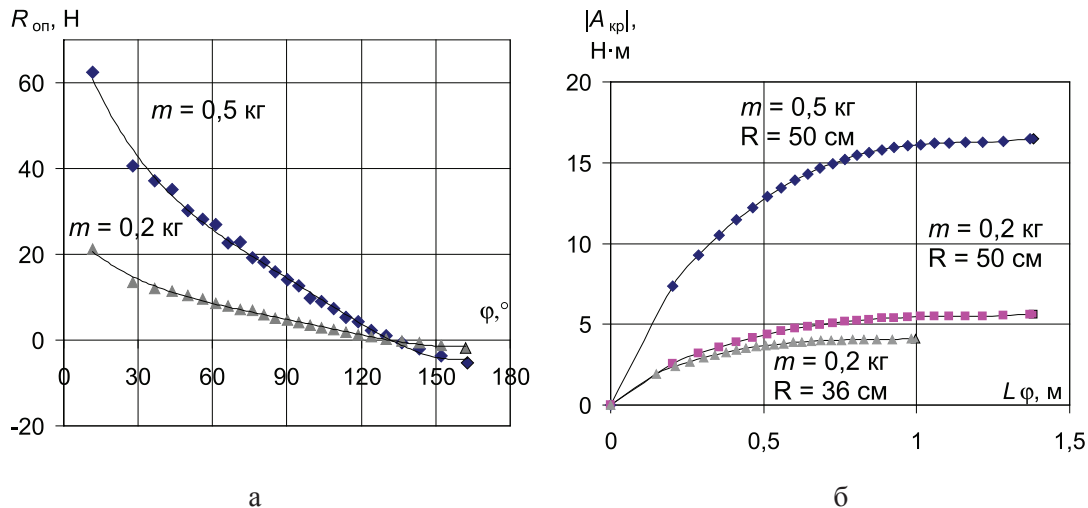


Рис. 4. Результаты исследований:

а – зависимость силы реакции опоры от угла подъема тела; б – зависимость модуля работы силы трения на круговом участке направляющей от длины пути

На втором этапе изучают, как работа силы трения при подъеме по круговому участку направляющей до остановки зависит от длины траектории и ее формы (радиуса) для тел различной массы. На рис. 4,б приведены результаты исследования зависимости модуля работы силы трения от длины пути, пройденного телом по круго-

вому участку направляющей. Исследования проводились для тел разной массы, сделанных из полиуретана. Графики наглядно демонстрируют нелинейный характер зависимости работы силы трения скольжения от пути пройденного телом, в то время как на прямолинейном участке направляющей эта зависимость является линейной.

Анализ зависимостей  $A_{кр} = A_{кр}(L_p)$  для направляющих разного радиуса (особенно в сравнении с линейным характером зависимости  $A_{пр} = -\mu mgL$  на линейном участке направляющей) позволяет убедиться, что работа неконсервативных сил зависит как от длины, так и от формы траектории, по которой движется тело. Трудоемкость расчетов и исследований в данной работе наглядно демонстрирует, как трудно учесть влияние силы трения в реальных установках. Реализация предложенной методики исследования в виде компьютерной лабораторной работы позволила обосновать возможность и методическую актуальность создания аналогичной натурной лабораторной работы.

Данная работа выполняется студентами в рамках лабораторного практикума по курсу общей физики, содержательно и методологически дополняя имеющийся на кафедре теоретической и экспериментальной физики Томского политехнического университета набор натуральных лабораторных работ. Данная работа входит в комплекс лабораторных работ по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере [3], который разрабатывается на кафедре с 2002 г. В настоящее время комплекс включает 25 лабораторных работ. Опыт преподавателей кафедры показывает, что введение в лабораторный практикум по общей физике работ по изучению фундаментальных физических моделей позволяет уже на младших курсах познакомить студентов с моделированием физических процессов как с одним из методов познания окружающего мира. Компьютерные лабораторные работы по

изучению идеальных физических моделей существенно расширяют спектр проблем, изучаемых студентами в рамках лабораторного практикума, стимулируя создание новых натуральных работ [4]. Сопоставление натуральных экспериментальных исследований с исследованиями моделей изучаемых в этих экспериментах явлений позволяет раскрыть их внутреннюю взаимосвязь и методологическую цельность в научных исследованиях, закладывая необходимую основу для дальнейшей научно-исследовательской работы студентов.

#### Список литературы

1. Леденев А.Н. Физика // В 5 кн. Кн.1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 240 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. – 560 с.
3. Revinskaya O.G., Kravchenko N.S. Studying of theoretical models of the physical phenomena and processes on the computer in a laboratory practical work // Journal of International Scientific Publication: Educational Alternatives. – 2010. – Vol. 8, Part 2. – P. 51–59.
4. Ревинская О.Г., Кравченко Н.С. Новые физические опыты как основа развития лабораторного практикума в вузе // Современный физический практикум: материалы XI Международной учебно-методической конференции, Минск, 12-14 октября 2010 г. – Минск: Издательский центр БГУ, – 2010. – С. 102–104.

#### Рецензенты:

Румбешта Е.А., д.п.н., профессор кафедры общей физики ГОУ ВПО «Томский государственный педагогический университет», г. Томск;

Демкин В.П., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой общей и экспериментальной физики ГОУ ВПО «Томский государственный университет», г. Томск.

Работа поступила в редакцию 05.07.2011.